Über das Unendliche

Prof. Dr. Duco van Straten und Oliver Labs

11.1.2002

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Mit Zahlen kann jeder (mehr oder weniger) gut umgehen. Auch mit dem Begriff *unendlich* werfen wir häufig um uns, ohne uns wirklich darüber Gedanken zu machen.

Wenn wir beispielsweise gefragt werden, wie viele natürliche Zahlen es gibt, werden die meisten wohl mit *unendlich* antworten. Ebenso wird wohl die Antwort auf die Frage lauten, wie viele reelle Zahlen es gibt.

Was ist mit der Frage: Gibt es mehr natürliche oder mehr reelle Zahlen? Die meisten werden wohl sagen, es gebe mehr reelle Zahlen. Und wie steht es mit dem Vergleich der natürlichen mit den rationalen Zahlen – wovon gibt es mehr? Gibt es noch größere Mengen als die Menge der reellen Zahlen?

In diesem Artikel werden wir diese Fragen diskutieren. Um das Thema gründlich zu behandeln, müßten wir eigentlich alle Axiome der Mengenlehre einführen. Dies werden wir allerdings nicht machen – wir geben hier nur einen Überblick, der ohne formale Basis die Grundgedanken vermitteln soll. Ausführlichere Darstellungen liefern die in der Bibliographie angegebenen Titel, insbesondere das Buch *Naive Mengenlehre* von Paul R. Halmos ([1]).

Neben dem hier vorgestellten Ansatz des Zählens mit Bijektionen, der auf die sogenannten Kardinalzahlen führt, könnte man auch Ordinalzahlen betrachten. Auch hierfür verweisen wir auf das eben zitierte Buch von Halmos.

2 Zählen mit Bijektionen

2.1 Bijektionen

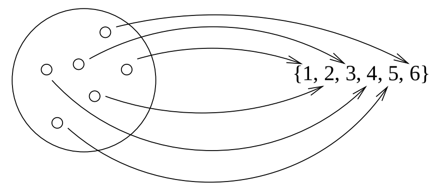

Abbildung 1: Eine bijektive Abbildung zwischen sechs Punkten und der Menge der Zahlen $1, 2, \ldots, 6$ – jedes Element hat genau ein Bild.

Definition 1 (Bijektion) Eine Abbildung f von einer nichtleeren Menge A in eine nichtleere Menge B (kurz: $f : A \longrightarrow B$) heißt

- *Injektion*, falls nie zwei verschiedene Elemente das gleiche Bild haben, d.h. falls ($\forall$ heißt *für alle*):

$$\forall\, a_1, a_2 \in A, a_1 \neq a_2 :\ f(a_1) \neq f(a_2).$$

- *Surjektion*, falls jedes Element der Zielmenge B mindestens einmal getroffen wird. Das kann man auch anderes formulieren: ..., falls für alle Elemente der Zielmenge B ein Urbild unter der Abbildung f existiert. In Formeln heißt dies ($\exists$ heißt *es existiert ein*):

$$\forall\, b \in B\ \exists\, a \in A : f(a) = b.$$

- *Bijektion*, falls f sowohl eine Injektion als auch eine Surjektion ist, d.h. falls jedes Element der Zielmenge genau einmal getroffen wird. In Formeln heißt dies ($\exists!$ heißt *es existiert genau ein*):

$$\forall\, b \in B\ \exists!\ a \in A : f(a) = b.$$

(Wir haben nicht genau definiert, was eine Menge sein soll. Das ist auch nicht so einfach zu sagen. Siehe dazu z.B. [2] oder [1]. Was könnte übrigens die Menge aller Mengen sein, die sich nicht selbst enthalten?)

Beispiel 1 1. Eine injektive, aber nicht surjektive Abbildung:

$$f : \{1,2\} \longrightarrow \{a,b,c\},\ 1 \mapsto a, 2 \mapsto b.$$

f ist nicht surjektiv, da c kein Urbild hat.

2. Eine surjektive, aber nicht injektive Abbildung:

$$g : \{1,2,3\} \longrightarrow \{a,b\},\ 1 \mapsto a, 2 \mapsto b, 3 \mapsto b.$$

g ist nicht injektiv, da 2 und 3 das gleiche Bild haben.

3. Eine weder injektive noch surjektive Abbildung:

$$h : \{1,2,3\} \longrightarrow \{a,b\},\ 1 \mapsto a, 2 \mapsto a, 3 \mapsto a.$$

h ist nicht injektiv, da a drei (also mehr als ein) Urbilder hat und nicht surjektiv, da b kein Urbild hat.

4. Eine bijektive (also injektive und surjektive) Abbildung:

$$i : \{1,2,3\} \longrightarrow \{a,b,c\},\ 1 \mapsto a, 2 \mapsto b, 3 \mapsto c.$$

5. Eine bijektive (also injektive und surjektive) Abbildung:

$$j : \mathbf{N} := \{1,2,3,\ldots\} \longrightarrow 2\mathbf{N} := \{2,4,6,\ldots\},\ n \mapsto 2n.$$

Aufgabe 1 (Injektionen und Surjektionen) Welche der folgenden Abbildungen sind injektiv, surjektiv oder sogar bijektiv? Für Injektionen und Surjektionen, die keine Bijektionen sind, gib jeweils Elemente an, bei denen es schief geht. Für Bijektionen gibt jeweils die Umkehrabbildung an.

1. Zunächst einige Abbildungen zwischen *endlichen* Mengen (streng genommen haben wir das Wort *endlich* noch gar nicht definiert, dazu später):

   (a) $f : \{a,b,c\} \longrightarrow \{1,2,3\},\ a \mapsto 2, b \mapsto 3, c \mapsto 1.$

   (b) $f : \{a,b,c\} \longrightarrow \{1,2,3\},\ a \mapsto 1, b \mapsto 1, c \mapsto 1.$

   (c) $f : \{a,b,c,d\} \longrightarrow \{1,2,3\},\ a \mapsto 1, b \mapsto 1, c \mapsto 1, d \mapsto 1.$

   (d) $f : \{a,b,c,d\} \longrightarrow \{1,2,3\},\ a \mapsto 1, b \mapsto 2, c \mapsto 3, d \mapsto 1.$

   (e) $f : \{a,b,c\} \longrightarrow \{1,2,3,4\},\ a \mapsto 1, b \mapsto 2, c \mapsto 3.$

2. Jetzt noch einige Abbildungen zwischen *unendlichen* Mengen (dieses Wort haben wir genauso wenig defiert, auch dazu gleich mehr). Obwohl wir auch Zahlen noch nicht definiert haben, benutzen wir hier in dieser Aufgabe die folgenden Bezeichnungen, in der Hoffnung, daß der Leser damit etwas anfangen kann:

   - $\mathbf{N} := \{1,2,3,\ldots\}$, die *natürlichen Zahlen*,
   - $2\mathbf{N} := \{2,4,6,\ldots\}$, die *geraden Zahlen*,
   - $k\mathbf{N} := \{1 \cdot k, 2 \cdot k, 3 \cdot k, \ldots\}$, die Vielfachen von k,
   - $\mathbf{Z} := \{0,1,-1,2,-2,\ldots\}$, die *ganzen Zahlen*,
   - $\mathbf{Q}$, die *rationalen Zahlen* und
   - $\mathbf{R}$, die *reellen Zahlen.*

   (a) $f : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N},\ n \mapsto 2n.$

   (b) $f : \mathbf{N} \cup \{0\} \longrightarrow \mathbf{Z},\ 0 \mapsto 0, 2n+1 \mapsto n, 2n \mapsto -n\ \forall\ n \in \mathbf{N}.$

   (c) $f : \{1,2,3\} \longrightarrow \mathbf{N},\ 1 \mapsto 1, 2 \mapsto 2, 3 \mapsto 3,$

   (d) $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R},\ 0 \mapsto 0, 0 \neq x \mapsto \frac{1}{x},$

   (e) $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, x \mapsto x^3,$

   (f) $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, x \mapsto x^3 + 5x.$

Die Lösungen der Aufgaben sind zwar im letzten Abschnitt (ab Seite 14) aufgeführt, doch sollte sich der Leser zunächst selbst darüber Gedanken machen, damit er das Folgende verstehen kann.

2.2 Mächtigkeit

Definition 2 (Mächtigkeit) Eine Menge A ist *höchtens so mächtig* wie eine Menge B, falls eine Injektion : $A \longrightarrow B$ existiert. Wir schreiben dann: $|A| \leq |B|$.
A ist *mindstens so mächtig* wie B, falls eine Surjektion : $A \longrightarrow B$ existiert. Wir schreiben dann: $|A| \geq |B|$.
A und B *haben die gleiche Mächtigkeit* oder *sind gleichmächtig* oder *haben die gleiche Kardinalität*, wenn eine Bijektion zwischen ihnen existiert. Wir schreiben dann: $|A| = |B|$.
Die Mächtigkeit einer Menge M notieren wir $|M|$.

Beispiel 2 Die Mengen $\{1,2,3\}$ und $\{a,b,c\}$ sind gleichmächtig wegen der Bijektion in Beispiel 1 ebenso wie die Mengen $\mathbf{N}$ und $2\mathbf{N}$ - umgangssprachlich gesprochen gibt es also genauso viele natürliche wie gerade Zahlen!

Aufgabe 2 (Mächtigkeit) Finde (auch unter Benutzung von Funktionen, die aus der Schule bekannt sind) Bijektionen zwischen den unten angegebenen Mengen und zeige deren Bijektivität durch Angabe einer Umkehrfunktion.

1. $\mathbf{R}$ und $\mathbf{R}_+ := (0,\infty) := \{r \in \mathbf{R} \mid r > 0\}$,
2. $(1,\infty)$ und $(0,1) := \{r \in \mathbf{R} \mid 0 < r < 1\}$,
3. $(0,1)$ und $\mathbf{R}$,
4. $(0,1)^2$ und $\mathbf{R}^2$,
5. Kreis mit Radius 1 um den Ursprung $(0,0)$ (*Einheitskreis*) in der reellen Ebene und $[0,1) := \{r \in \mathbf{R} \mid 0 \leq r < 1\}$.
6. Menge N der Nullstellen der Sinus-Funktion $\sin : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ und $\mathbf{Z}$.

Die folgenden wichtigen Eigenschaften der Kardinalität werden wir hier nicht beweisen.

Satz 1
- *Falls* $|X| \leq |Y|$ *und* $|Y| \leq |Z|$, *so* $|X| \leq |Z|$ *(*Transitivität von $\leq$*).*
- *Falls* $|X| \leq |Y|$ *und* $|Y| \leq |X|$, *so* $|X| = |Y|$.
- *Falls* $|X| \leq |Y|$ *und* $|X| \geq |Y|$, *so* $|X| = |Y|$.

*(*Schröder-Bernstein-Theorem*).*

Beweis: Siehe z.B. [1]. □

Wir haben eben den Begriff der Mächtigkeit eingeführt. Damit können wir jetzt, ohne irgend etwas über Zahlen wissen zu müssen, zählen:

Definition 3 (natürliche Zahlen) Wir definieren:

- $0 := \emptyset$ (wobei $\emptyset := \{\}$ die leere Menge bezeichnet),
- $1 := \{0\} = \{\emptyset\}$,
- $2 := \{0,1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$,
- $3 := \{0,1,2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$,

- usw. (natürlich haben wir auch nicht genau definiert, was *usw.* in unserem Zusammenhang genau zu heißen haben, siehe dazu [1] oder [2]).

Wir sagen, eine Menge hat k Elemente, wenn sie gleichmächtig mit der eben definierten Menge k ist. Die Menge $\mathbf{N} := \{1,2,3,\ldots\}$ nennen wir natürliche Zahlen.

Beispiel 3
- Die Menge $\{a,b,c\}$ hat 3 Elemente wegen Beispiel 2.
- Die Menge k hat k Elemente.
- Die Menge $\emptyset$ hat 0 Elemente.

Diese Definition der Zahlen über die Gleichmächtigkeit von Mengen klingt etwas umständlich, aber sie hat den Vorteil, daß man sie auch auf Mengen mit unendlich vielen Elementen anwenden kann. Außerdem kann man sie nur mit Hilfe von ganz wenigen Annahmen (wie: Es gibt eine leere Menge. Es gibt eine Menge, die zwei gegebene Mengen als Elemente enthält.) formulieren. Solche Annahmen gehören zu den sogenannten Axiomen der Mengenlehre; alle Axiome werden in [1] ausführlich diskutiert. Zunächst definieren wir:

Definition 4 (Endlich und Unendlich) Sei M eine Menge. Wir sagen, M ist *endlich*, falls sie die gleiche Mächtigkeit wie eine natürliche Zahl hat. Wir sagen, M ist *unendlich*, falls sie nicht endlich viele Elemente hat, falls sie also nicht einer natürlichen Zahl gleichmächtig ist bzw. falls $\mathbf{N}| \leq M$.

Natürlich ist diese Definition gerade so gemacht, daß sie dem gewöhnlichen Unendlichkeitsbegriff, den man intuitiv verwendet, entspricht. Beispiele für unendliche Mengen sind:

Beispiel 4
- $\mathbf{N}$,
- $\mathbf{Q}$ *(man nehme die Injektion* $: \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{Q}, n \mapsto n$*),*
- $\mathbf{R}$ *(man nehme die Injektion* $: \mathbf{Q} \longrightarrow \mathbf{R}, q \mapsto q$*).*

Im folgenden wollen wir uns nur noch mit unendlichen Mengen beschäftigen. Auch deren Elemente können wir jetzt nämlich zählen – und wie wir sehen werden gibt es verschiedene *Unendlichkeiten* (sogar unendlich viele!).

2.3 Abzählbarkeit

Definition 5 (Abzählbarkeit) Eine unendliche Menge M heißt *abzählbar*, falls sie die gleiche Kardinalität wie die Menge der natürlichen Zahlen hat(falls es also eine Bijektion zwischen M und $\mathbf{N}$ gibt). Ansonsten heißt M *überabzählbar*. Für die Mächtigkeit der natürlichen Zahlen schreibt man meistens kurz $\omega := |\mathbf{N}|$.

Sehr viele Mengen sind abzählbar, von denen man es auf den ersten Blick nicht erwarten würde. Weiter oben (Aufgabe 1) haben wir schon gesehen, daß es eine Bijektion zwischen $\mathbf{N}$ und $\mathbf{Z}$ gibt, daß $\mathbf{Z}$ also abzählbar ist. Betrachten wir nun Produkte von Mengen:

Definition 6 (Karthesisches Produkt) Das *karthesische Produkt* zweier Mengen A und B ist definiert als die Menge der geordneten Paare von Elementen aus A und B:

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Satz 2 *Das karthesische Produkt $A \times B$ zweier abzählbarer Mengen A und B ist abzählbar.*

Beweis: Seien $f : A \longrightarrow \mathbf{N}$ und $g : B \longrightarrow \mathbf{N}$ Bijektionen zwischen A und $\mathbf{N}$ bzw. B und $\mathbf{N}$ (diese existieren wegen der Abzählbarkeit von A und B. Es genügt jetzt, eine injektive Abbildung $h : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ zu finden. Dann ist nämlich offenbar

$$k : A \times B \longrightarrow \mathbf{N},\ (a,b) \mapsto h((f(a), g(b)))$$

eine Injektion und also $A \times B$ höchstens so mächtig wie $\mathbf{N}$. Daß $A \times B$ auch mindestens so mächtig wie $\mathbf{N}$ ist, zeigt schon die Surjektion : $A \times B \longrightarrow \mathbf{N},\ (a,b) \mapsto f(a)$.

Wie aber sieht h aus? Wir nummerieren die Elemente von $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ wie in Abb. 2 durch die kleinen hochgestellten Zahlen angegeben:

Das kann man auch in einer Formel zusammenfassen:

$$(m,n) \mapsto \frac{(n+m-1)\cdot(n+m-2)}{2} + m.$$

Deren Beweis bleibt dem Leser als Aufgabe überlassen. Da die dadurch definierte Abbildung eine Injektion : $\mathbf{N} \times \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ darstellt (auch der Beweis hierfür bleibt dem Leser überlassen – wie lautet die Umkehrfunktion?), ist der Satz bewiesen. $\square$

Damit können wir nun leicht zeigen, daß auch die Menge der rationalen Zahlen abzählbar ist:

Korollar 1 *Die Menge der rationalen Zahlen ist abzählbar.*

Beweis: Die Abbildung

$$s : \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}\backslash\{0\} \longrightarrow \mathbf{Q},\ (m,n) \mapsto \frac{m}{n}$$

ist offenbar eine Surjektion. $\square$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
(1,1)^1 & \rightarrow & (1,2)^2 & \rightarrow & (1,3)^4 & \rightarrow & (1,4)^7 & \rightarrow & (1,5)^{11} & \rightarrow & \cdots \\
& \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\
(2,1)^3 & & (2,2)^5 & & (2,3)^8 & & (2,4)^{12} & & \cdots & & \\
& \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & & \\
(3,1)^6 & & (3,2)^9 & & (3,3)^{13} & & \cdots & & & & \\
& \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & & & & \\
(4,1)^{10} & & (4,2)^{14} & & \cdots & & & & & & \\
& \swarrow & & \swarrow & & & & & & & \\
(5,1)^{15} & & \cdots & & & & & & & & \\
& \swarrow & & & & & & & & & \\
\vdots & & & & & & & & & &
\end{array}$$

Abbildung 2: Die Menge aller Paare von natürlichen Zahlen ist abzählbar; und damit auch die Menge der rationalen Zahlen.

Aufgabe 3 (Abzählbarkeit) Zeige, daß auch die Menge der Tripel mit rationalen Einträgen $\mathbf{Q} \times \mathbf{Q} \times \mathbf{Q} := \{(a,b,c) \mid a,b,c \in \mathbf{Q}\}$ abzählbar ist.

Dieses Spiel kann man noch sehr viel weiter treiben. Eine schöne anschauliche Darstellung dieser Sätze liefert Hilberts Hotel:

Beispiel 5 (Hilberts Hotel) Hilberts Hotel hat abzählbar unendlich viele Betten. Dies hat den großen Vorteil, daß selbst, wenn alle Betten belegt sind, noch Gäste untergebracht werden können (s. Abb. 3).

- Kommt 1 weiterer Gast an, so fordert der Pförtner jeden Gast auf, ins nächste Zimmer zu gehen. Derjenige im 1. Zimmer geht ins 2. Zimmer; derjenige im 2. Zimmer geht ins 3. Zimmer usw. So wird das 1. Zimmer frei und der Neuankömmling findet dort Platz.
- Kommen nun aber 2 Gäste an, so muß jede der schon zugeteilten Personen zwei Zimmer weiter gehen.
- Genauso mit k Neuankömmlingen.
- Kommt jetzt aber ein ganzer Bus mit abzählbar unendlich vielen Neuankömmlingen, so müssen die Gäste, die bisher in Zimmer n waren, einfach nach Zimmer $2n$ umziehen. So werden alle ungeraden Zimmer frei und der ganze Bus findet Platz.

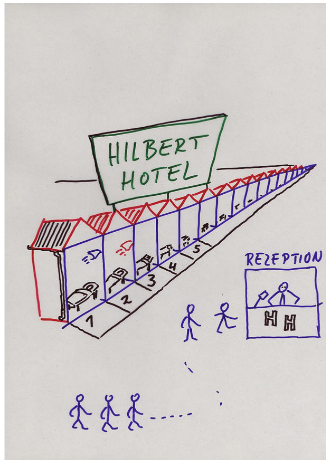

Abbildung 3: Hilberts Hotel hat unendlich viele Betten. Selbst wenn alle Betten belegt sind, finden noch Neuankömmlinge dort Platz. Zieht beispielsweise der Bewohner von Zimmer 1 in Zimmer 2 um, der Bewohner von Zimmer 2 in Zimmer 4, der Bewohner von Zimmer 3 in Zimmer 6 usw., so werden alle ungeraden Zimmer frei und unendlich viele Neuankömmlinge können untergebracht werden. (Bild aus [5])

- Und sogar abzählbar unendlich viele solche Busse können untergebracht werden, wie wir in Satz 2 gesehen haben.

2.4 Überabzählbarkeit

Aber trotzdem sind nicht alle Mengen abzählbar! Cantor (Abb. 4) entdeckte dies um 1900 mit Hilfe des nach ihm benannten Diagonalverfahrens:

Satz 3 (Cantors Diagonalverfahren) *Die reellen Zahlen sind nicht abzählbar.*

Abbildung 4: Georg Cantor (1845 - 1918)

Beweis: Wir zeigen sogar, daß schon das Intervall $(0,1)$ überabzählbar ist. Wären die reellen Zahlen zwischen 0 und 1 abzählbar, so könnten wir sie nacheinander aufzählen. Da jede reelle Zahl als Dezimalzahl zu schreiben ist, beginnt eine solche Aufzählung beispielsweise so:

1: $0{,}\mathit{3}749\cdots$
2: $0{,}4\mathit{5}92\cdots$
3: $0{,}70\mathit{1}3\cdots$
3: $0{,}356\mathit{1}\cdots$
$\vdots$

Wählen wir nun eine Zahl d, die sich

- an der ersten Stelle hinter dem Komma von der ersten Zahl der Liste unterscheidet
- an der zweiten Stelle hinter dem Komma von der zweiten
- usw.,

so erhalten wir eine Zahl, die sich von jeder Zahl, die in der Auflistung enthalten ist, an mindestens einer Stelle unterscheidet (sie könnte z.B. beginnen mit 0,4622...).
Wir sehen, daß es völlig egal ist, wie wir versuchen, die reellen Zahlen zwischen 0 und 1 abzuzählen; wir schaffen es nicht – immer fehlt mindestens eine (nämlich d). Das Intervall $(0,1)$ und damit $\mathbf{R}$ ist nicht abzählbar. □

Wir wissen jetzt, daß es mindestens zwei verschiedene unendliche Kardinalitäten gibt. Man könnte meinen, daß es auch nicht mehr gibt, weil man (ähnlich wie bei den abzählbaren Mengen weiter oben) unerwartet viele Mengen findet, die die gleiche Mächtigkeit wie $\mathbf{R}$ haben:

Satz 4 $\mathbf{R}$ *ist genauso mächtig wie* $\mathbf{R}^2 := \mathbf{R} \times \mathbf{R}$.

Beweis: Wieder führen wir den Beweis nur für das Intervall $(0,1)$ durch. Die Erweiterung auf alle reellen Zahlen bleibt dem Leser überlassen.
Wir definieren eine Bijektion $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ mit Hilfe der Dezimaldarstellung der reellen Zahlen: Ist $a = 0, a_1a_2a_3a_4\ldots$ und $b = 0, b_1b_2b_3b_4\ldots$, so definieren wir das Bild von (a,b) durch:

$$(a,b) \mapsto 0, a_1b_1a_2b_2a_3b_3\ldots.$$

Dies ist eine Bijektion (zum Beweis gebe die Umkehrfunktion an). □

Aufgabe 4 (Überabzählbarkeit) Finde Bijektionen zwischen

1. $\mathbf{R}^2$ und $\mathbf{R}$,
2. $(0,1)^3$ und $(0,1)$,
3. $\mathbf{R}^3$ und $\mathbf{R}$.

Eine weitere interessante überabzählbare Menge ist der sogenannte Cantor-Staub. Vom Intervall $(0,1)$ entferne man das mittlere Drittel. Es bleiben die beiden Intervalle $(0,\frac{1}{3})$ und $(\frac{2}{3},1)$ übrig. Von diesen beiden entferne man wiederum jeweils das mittlere Drittel usw. Die Menge, die selbst bei unendlich vielen Schritten übrigbleibt, ist genauso mächtig wie die reellen Zahlen. Dazu gibt es einen schönen Artikel in [4].

2.5 Potenzmengen

Im Folgenden werden wir zeigen, daß der Übergang von abzählbar unendlich mächtigen Mengen zu den überabzählbar unendlich mächtigen nur ein erster Schritt war. Wir werden dies mit Hilfe von Potenzmengen verallgemeinern und dadurch sehen, daß es sogar unendlich viele verschiedene Kardinalitäten gibt! Auch diese Ideen stammen ursprünglich von Georg Cantor.

Definition 7 (Potenzmenge) Die Menge $\mathcal{P}(X)$ aller Teilmengen einer gegebenen Menge X heißt deren *Potenzmenge*:

$$\mathcal{P}(X) := \{A \mid A \subset X\}.$$

Satz 5 *Eine Menge X ist nicht so mächtig wie ihre Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$:*

$$|X| < |\mathcal{P}(X)|\,.$$

Anders gesagt: Es gibt eine Injektion, aber keine Surjektion von X in $\mathcal{P}(X)$ (Def. 2).

Beweis: Es gilt: $|X| \leq |\mathcal{P}(X)|$, da $f : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$, $x \mapsto \{x\}$ eine Injektion ist. Es bleibt noch zu zeigen, daß $|X| \neq |\mathcal{P}(X)|$. Nehmen wir dazu an, eine Bijektion von X auf $\mathcal{P}(X)$ existiert.
Wir definieren eine Menge: $A := \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$. Da $A \in \mathcal{P}(X)$ und da $f : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ gemäß unserer Annahme surjektiv ist, existiert ein $a \in X : f(a) = A$.
Es gilt aber entweder $a \in A$ oder $a \notin A$.

- Falls $a \in A$, so (nach Def. von A): $a \notin f(a)$. Da aber $f(a) = A$ und somit $a \in A = f(a)$, ergibt sich ein Widerspruch.
- Falls $a \notin A$, so (nach Def. von A): $a \in f(a)$. Aber wieder gilt $f(a) = A$. Somit folgt $a \in A$ und $a \notin A$, was nicht gleichzeitig der Fall sein kann.

Da wir alle Fälle betrachtet haben (es waren nur zwei), aber keiner der Fälle zutrifft, muß eine Annahme falsch gewesen sein. Aber die einzige Annahme, die wir gemacht haben, war die, daß eine Bijektion von X auf $\mathcal{P}(X)$ existiert. Dies kann also nicht sein und wir haben bewiesen: $|X| \neq |\mathcal{P}(X)|$. □

Warum ist dies eine Verallgemeinerung des Schrittes von der Mächtigkeit der natürlichen Zahlen auf die Mächtigkeit der reellen Zahlen? Betrachten wir dazu zunächst die Menge aller Abbildungen von einer Menge in eine andere Menge:

Definition 8 Seien A und B zwei Mengen. Die Menge aller Abbildungen von B in A notieren wir:

$$A^B := \{f : B \longrightarrow A\}.$$

Beispiel 6 (A^B)

- $\{0,1\}^{\{0\}} = \left\{ \begin{array}{l} f : \{0\} \longrightarrow \{0,1\}, 0 \mapsto 0, \\ g : \{0\} \longrightarrow \{0,1\}, 0 \mapsto 1 \end{array} \right\}$,
- $\{0,1,2\}^{\emptyset} = \emptyset$,

- $\{0,1\}^{\{0,1\}} \quad = \left\{ \begin{array}{l} f_1 : \{0,1\} \longrightarrow \{0,1\},\ 0 \mapsto 0, 1 \mapsto 1, \\ f_2 : \{0,1\} \longrightarrow \{0,1\},\ 0 \mapsto 1, 1 \mapsto 0, \\ f_3 : \{0,1\} \longrightarrow \{0,1\},\ 0 \mapsto 0, 1 \mapsto 0, \\ f_4 : \{0,1\} \longrightarrow \{0,1\},\ 0 \mapsto 1, 1 \mapsto 1. \end{array} \right\},$

Aufgabe 5 **(A^B)** Wie viele Elemente haben die Mengen

1. $\{0,1\}^{\{0\}}$,
2. $\{0,1\}^{\{0,1\}}$,
3. $\{0,1\}^{\{0,1,2\}}$,
4. $\{0,1\}^{\{0,1,2,\ldots,n\}}$, $n \in \mathbf{N}$?

Für endliche Mengen können wir die Kardinalitäten dieser Mengen recht gut verstehen. Welche Kardinalität hat aber die Menge $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$? Wie viele Abbildungen gibt es also von den natürlichen Zahlen in die Menge $\{0,1\}$?

Satz 6 $\left|\{0,1\}^{\mathbf{N}}\right| = |\mathbf{R}|$.

Beweis: Wir haben in Aufgabe 2 schon gesehen, daß $|\mathbf{R}| = |(0,1)|$. Schreiben wir nun eine reelle Zahl $a \in (0,1)$ in der Binärdarstellung, $a = 0, a_1a_2a_3a_4\ldots$, so können wir die geforderte Bijektion folgendenmaßen notieren:

$$f : (0,1) \longrightarrow \{0,1\}^{\mathbf{N}},\ 0, a_1a_2a_3\ldots \mapsto f_a : \mathbf{N} \longrightarrow \{0,1\},\ i \mapsto a_i\ \forall i \in \mathbf{N}.$$

□

Umgangssprachlich gesagt gibt es also genauso viele Abbildungen von den natürlichen Zahlen in die zweielementige Menge $\{0,1\}$ wie reelle Zahlen. Mit einem analogen Beweis hätten wir übrigens auch zeigen können: $\left|\{0,1,2\}^{\mathbf{N}}\right| = |\mathbf{R}|$, etc. Es gilt also auch:

$$\left|\{0,1,2,\ldots,n\}^{\mathbf{N}}\right| = \left|\{0,1\}^{\mathbf{N}}\right|\ \forall n \in \mathbf{N}.$$

Diese Kardinalität erhalten wir auch durch Bilden der Potenzmenge:

Satz 7 *Für jede Menge X gilt:* $|\mathcal{P}(X)| = \left|\{0,1\}^X\right|$.

Beweis: Sei $A \subset X$ eine Teilmenge der Menge X. Wir definieren die *Charakteristische Funktion*

$$\chi^A : X \longrightarrow \{0,1\},\ \chi^A(x) = \left\{ \begin{array}{l} 1,\ \text{falls } x \in A, \\ 0,\ \text{falls } x \in X \backslash A. \end{array} \right.$$

Damit definieren wir $f : \mathcal{P}(X) \longrightarrow 2^X, A \mapsto \chi^A$. Dies ist eine Bijektion, denn:

- Injektivität: $A \neq B \Rightarrow \chi^A \neq \chi^B$.
- Surjektivität: Sei eine Abbildung $g : X \longrightarrow 2$ gegeben. Dann ist $B := \{x \in X \mid g(x) = 1\} \in \mathcal{P}(X)$ und $f(B) = \chi^B$ ist ein Urbild von g.

□

Letztendlich haben wir also gesehen:

Korollar 2 (Kardinalitäten) *Es gibt eine unendliche Folge von unendlichen Kardinalitäten:*

$$\begin{aligned} |\mathbf{N}| &< |\mathbf{R}| = \left|2^{\mathbf{N}}\right| = |\mathcal{P}(\mathbf{N})| \\ &< |\mathcal{P}(\mathbf{R})| = \left|2^{\mathbf{R}}\right| \\ &< |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbf{R}))| = \left|2^{\mathcal{P}(\mathbf{R})}\right| \\ &< \cdots. \end{aligned}$$

2.6 Die Continuums-Hypothese

Es stellt sich nun die Frage: Gibt es zwischen der Kardinalität der reellen Zahlen und der kardinalität der natürlichen Zahlen noch eine weitere?

Cantor konnte diese Frage nicht beantworten, stellte aber die sogenannte *Continuums-Hypothese* auf, nach der dies nicht der Fall ist.

Dieses Problem beschäftigte die Mathematiker des 20. Jahrhunderts lange Zeit, bis schließlich bewiesen wurde:

Satz 8 *Die Continuums-Hypothese ist mit den üblichen Axiomen der Mengenlehre nicht beweisbar!*

Das Axiomensystem der Mengelehre wird in dem sehr schönen Buch *Naive Mengenlehre* von Paul R. Halmos ([1]) genauestens erläutert. Auch speziell zur Continuums-Hypothese gibt sehr viel Literatur, beispielsweise [3].

3 Lösungen

Lösung 1 (Injektionen und Surjektionen)

1. (a) Bijektiv, da injektiv und surjektiv. Umkehrabbildung: $f^{-1} : \{1,2,3\} \longrightarrow \{a,b,c\}$, $1 \mapsto c, 2 \mapsto a, 3 \mapsto b$.
   (b) Weder injektiv (1 hat drei Urbilder) noch surjektiv (2 und 3 werden nicht getroffen).

(c) Weder injektiv (1 hat vier Urbilder) noch surjektiv (2, 3 und 4 werden nicht getroffen).

(d) Nicht injektiv (1 hat zwei Urbilder), aber surjektiv (1, 2 und 3 werden getroffen).

(e) Injektiv, aber nicht surjektiv (4 wird nicht getroffen).

2. (a) Injektiv, aber nicht surjektiv (die ungeraden Zahlen werden nicht getroffen).

(b) Bijektiv, da offenbar injektiv und surjektiv. Die Umkehrabbildung ist $f^{-1} : \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{N} \cup \{0\},\ n \mapsto \begin{cases} -2n, & \text{falls } n \leq 0, \\ 2n+1, & \text{falls } n > 0. \end{cases}$

(c) Injektiv (kein Element hat zwei Urbilder), aber nicht surjektiv (alle Zahlen größer 3 werden nicht getroffen).

(d) Bijektiv. Die Umkehrabbildung ist $f^{-1} = f$, da $f(f(x)) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x \ \forall\ x \neq 0$.

(e) Bijektiv mit Umkehrabbildung: $f^{-1},\ x \mapsto \sqrt[3]{x}$.

(f) Surjektiv, aber nicht injektiv (0 hat die Urbilder 0, $\sqrt{5}$ und $-\sqrt{5}$). Surjektiv ist klar (Bild der Abbildung?). Man kann es auch so sehen: $f(x) \mapsto \infty$ für $x \mapsto \infty$ und $f(x) \mapsto -\infty$ für $x \mapsto -\infty$ – alle Werte dazwischen werden angenommen.

Lösung 2 (Mächtigkeit) 1. $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}_+,\ r \mapsto e^r := exp(r)$. Die Umkehrfunktion ist $f^{-1} = ln$.

2. $g : (1,\infty) \longrightarrow (0,1),\ r \mapsto \frac{1}{r}.\ \ g^{-1} = g$.

3. $h : (0,1) \longrightarrow \mathbf{R},\ 0.5 \mapsto 0,\ r \mapsto \begin{cases} \frac{1}{(r-0.5)\cdot 2} - 1\ \forall r > 0.5, \\ \frac{1}{(r-0.5)\cdot 2} + 1\ \forall r < 0.5, \end{cases}$

$h^{-1} : \mathbf{R} \longrightarrow (0,1),\ 0 \mapsto 0.5,\ r \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2(r+1)} + 0.5\ \forall r > 0, \\ \frac{1}{2(r-1)} + 0.5\ \forall r < 0. \end{cases}$

4. $i : (0,1)^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2,\ i(x,y) = (h(x), h(y))$.

5. $k : [0,1) \longrightarrow$ Einheitskreis, $t \mapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$,

$k^{-1} :$ Einheitskreis $\longrightarrow [0,1),\ (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{\arccos(x)+\pi}{4\pi}, & \text{falls} \\ \frac{\arccos(x)+\pi}{4\pi} + \frac{1}{2} & \text{sonst.} \end{cases}$

6. $l : N \longrightarrow \mathbf{Z},\ \pi \cdot n \mapsto n$,
$l^{-1} : \mathbf{Z} \longrightarrow N,\ n \mapsto \pi \cdot n$.

Lösung 3 (Abzählbarkeit) Sei $f : \mathbf{Q} \longrightarrow \mathbf{N}$ eine Injektion (diese existiert, da $\mathbf{Q}$ abzählbar ist). Dann ist auch $g : \mathbf{Q} \times \mathbf{Q} \times \mathbf{Q} \longrightarrow \mathbf{N} \times \mathbf{N} \times \mathbf{N},\ (a,b,c) \mapsto (f(a), f(b), f(c))$ eine Injektion.

Sei außerdem $h : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ eine Injektion (diese existiert, da das Produkt zweier abzählbarer Menge wieder abzählbar ist, Satz 6). Dann ist $i : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \times \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N},\ (a,b,c) \mapsto h(h(a,b),c)$ ebenfalls eine Injektion.
Letztlich haben wir also die gefragte Injektion $j : \mathbf{Q}\times\mathbf{Q}\times\mathbf{Q} \longrightarrow \mathbf{N},\ (a,b,c) \mapsto i(g((a,b,c)))$ gefunden.

Lösung 4 (Überabzählbarkeit) 1. Sei $f : (0,1)^2 \longrightarrow (0,1)$ die in Satz 4 konstruierte Bijektion. Sei außerdem $g : (0,1) \longrightarrow \mathbf{R}$ die in Lösung 3 konstruierte Bijektion. Dann ist deren Verknüpfung

$$h : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R},\ (x,y) \mapsto g(f(g^{-1}(x), g^{-1}(y)))$$

eine Bijektion.
Die Menge aller Punkte der Ebene ist also genauso mächtig wie die Menge der Punkte einer Geraden!

2. Sei $f : (0,1)^2 \longrightarrow (0,1)$ die in Satz 4 konstruierte Bijektion. Dann ist $g : (0,1)^3 \longrightarrow (0,1),\ (a,b,c) \mapsto f(f(a,b),c)$ eine Bijektion.
Wir hätten eine Bijektion auch explizit angeben können wie in Satz 4: $(a,b,c) \mapsto 0, a_1 b_1 c_1 a_2 b_2 c_2 \ldots$. Die Menge der Punkte eines Würfels ist also genauso mächtig wie die Menge der Punkte einer Strecke!

3. Genauso wie in der ersten Teilaufgabe können wir die in der zweiten Teilaufgabe konstruierte Bijektion mit der Bijektion in Lösung 3 zusammenschalten und erhalten so eine Bijektion zwischen allen Punkten des 3-Raumes und allen Punkten einer Geraden!

Lösung 5 (A^B) Die gewählte Notation war keineswegs zufällig, denn:

1. $\left|\{0,1\}^{\{0\}}\right| = 2^1$, da $\left\{ \begin{array}{l} 0 \mapsto 0 \text{ und} \\ 0 \mapsto 1 \end{array} \right\}$ die einzigen Abbildungen von $\{0\}$ in $\{0,1\}$ sind.

2. $\left|\{0,1\}^{\{0,1\}}\right| = 2^2$; die vier Abbildungen sind: $\left\{ \begin{array}{l} 0 \mapsto 0,\ 1 \mapsto 1, \\ 0 \mapsto 1,\ 1 \mapsto 1, \\ 0 \mapsto 0,\ 1 \mapsto 0 \text{ und} \\ 0 \mapsto 1,\ 1 \mapsto 0 \end{array} \right\}$

3. $\left|\{0,1\}^{\{0,1,2\}}\right| = 2^3$, analog.

4. $\left|\{0,1\}^{\{0,1,2,\ldots,n\}}\right| = 2^n$. Beweis mit Induktion.
Für $n = 1$, $n = 2$ und $n = 3$ haben wir die Formel schon bewiesen. Nehmen wir jetzt an, die Formel gelte für ein n. Wieviele Abbildungen gibt es dann von der Menge {0, 1, 2, . . . , n, n+1} in die Menge {0,1}? Da für das Bild von $n+1$ nur 2 Möglichkeiten existieren (0 oder 1), ist die Anzahl der Abbildungen $2 \cdot \left|\{0,1\}^{\{0,1,2,\ldots,n\}}\right| = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$. Damit ist die Formel für alle $n \in \mathbf{N}$ bewiesen.

Wir hatten in Def. 3 die natürlichen Zahlen definiert. Schreiben wir die obigen Mengen mit dieser Notation um, so haben wir also gesehen: $|2^1| = 2^1, \ldots, |2^n| = 2^n$.

Literatur

[1] Paul R. Halmos (1961): Naive Set Theory. D. van Nostrand Company, Inc. Princeton, New Jersey. (Titel der deutschen Übersetzung: Naive Mengenlehre).

[2] Erich Kampe (1955): Mengenlehre. Sammlung Göschen, Band 999/999a. Walter de Gruyter & Co. Berlin.

[3] Sierpinski (1934): Hypothèse du continu. Warzawa–Lwow.

[4] Spektrum der Wissenschaft Spezial (Spezial I, 2001): Das Unendliche.

[5] Duco van Straten (2001): Das Unendliche. Vortrag anläßlich der MONOID-Preisverleihung 2001. Mainz. `http://enriques.mathematik.uni-mainz.de/straten/publics/vortragUnendlich/vortrag.p`