Komplexe Zahlen

Prof. Dr. Duco van Straten und Oliver Labs

25.11.2001

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Heutzutage finden komplexe Zahlen in vielen Bereichen der Wissenschaft Anwendung; natürlich z.B. in der Mathematik, aber auch in der Elektrotechnik sind sie ein alltägliches Hilfsmittel. Was aber hat es mit den komplexen Zahlen auf sich? Vor allem läßt sich darüber sagen, daß sie eigentlich gar nicht so komplex sind, wie man denken könnte und daß man mit ihnen ganz normal rechnen kann, wenn man nur einige einfache Regeln beachtet.

Aber warum komplexe Zahlen? Warum noch mehr Zahlen? Reichen die reellen Zahlen nicht? Genauso könnte man fragen: Warum negative Zahlen? Reichen die positiven nicht? Die Antwort darauf kann sich aber jeder leicht beantworten: Man möchte z.B. Gleichungen wie $x+5=3$ auch lösen[1]. Ebenso möchte man Gleichungen der Form $x^2=b$ nicht nur für positive (z.B. $x^2=1$, Lösungen: ± 1), sondern auch für negative Zahlen (z.B. $x^2=-1$) lösen, was mit den reellen Zahlen bekanntlich nicht möglich ist.

2 Definition

Zur Veranschaulichung der reellen Zahlen verwendet man gerne einen sog. Zahlenstrahl (s. Abb. 1). Da dort offenbar „kein Platz“ mehr für weitere

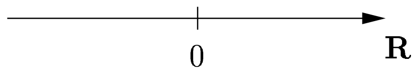

Abbildung 1: Der Zahlenstrahl der reellen Zahlen.

Zahlen ist, besteht die Idee der Definition von komplexen Zahlen darin, auf geschickte Art nicht nur einen Strahl, sondern die ganze Ebene zu benutzen.

2.1 Vektoren in der Ebene

Um mit Punkten der Ebene rechnen zu können, müssen wir zunächst die Ebene ein wenig besser verstehen. Dafür führen wir den folgenden Begriff ein:

Definition 1 *Ein* Vektor *in der Ebene ist ein Paar von reellen Zahlen* (a,b).

Beispiel 1 *Einige Vektoren in der Ebene sind:*

- $(0,0)$
- $(1,0)$
- $(0,1)$
- $(\sqrt{2},1)$
- $(-\pi,-\frac{3}{2})$

Vektoren sind aber nicht einfach nur abstrakte Paare von Zahlen, sondern wir können sie uns auch als Pfeile in der Ebene vorstellen (s. auch Abb. 2).

[1] Das Beispiel kommt übrigens in der folgenden amüsanten Feststellung vor: Wenn 3 Leute im Aufzug sind und 5 aussteigen, dann müssen noch 2 einsteigen, damit der Aufzug leer ist.

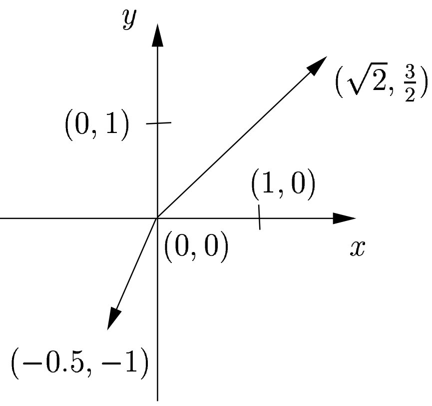

Abbildung 2: Vektoren in der Ebene.

2.2 Rechnen mit Vektoren in der Ebene

Auch um mit Vektoren zu rechnen ist das Bild vom Pfeil hilfreich. Was könnte sinnvollerweise nämlich $2 \cdot (1,1)$ sein? Z.B. einfach der Pfeil $(1,1)$, nur doppelt so lang ist, also $(2,2)$ (s. auch Abb. 3).

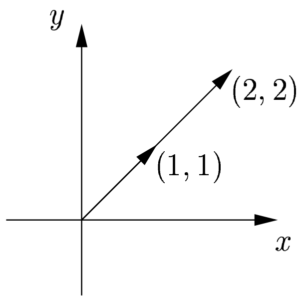

Abbildung 3: Rechnen mit Vektoren in der Ebene.

Allgemein setzen wir:

Definition 2 *Ist $k \in \mathbf{R}$ eine reelle Zahl und (a,b) ein Vektor von reellen Zahlen, so definieren wir:*

$$k \cdot (a,b) := (k \cdot a, k \cdot b).$$

Wie könnte man zwei Pfeile addieren? Zum Beispiel, indem man beide Pfeile aneinander hängt, also:
Allgemein:

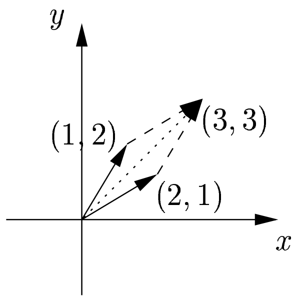

Abbildung 4: Addieren Vektoren in der Ebene: $(1,2)+(2,1) = (1+2,2+1) = (3,3) = (2,1) + (1,2)$

Definition 3 *Sind (a,b) und (c,d) zwei Vektoren von reellen Zahlen, so definieren wir die Addition:*

$$(a,b) + (c,d) := (a+c, b+d).$$

Offenbar ist es egal, welchen Vektor man an welchen hängt (s. auch Abb. 4); jedesmal kommt die gleiche Summe heraus – man sagt, die Addition von Vektoren ist *kommutativ*.

Das gilt natürlich nicht für die Subtraktion, die sich aus der Addition, kombiniert mit der Multiplikation mit der reellen Zahl -1 ergibt: $(a,b)-(c,d) := (a,b) + (-1)\cdot(c,d) = (a,b) + (-c,-d) = (a-c, b-d)$.

Aufgaben 1 *Zum Üben der eben eingeführten Begriffe sind hier einige Aufgaben.*

- *Berechne:*
  - $(1,5) + (5,1)$,
  - $2 \cdot (2,3) - (4,6)$,
  - $51 \cdot (\frac{3}{17}, \frac{7}{17}) - 4 \cdot (2,5)$.
- *Was ist das neutrale Element der Addition – also für welchen Vektor (a,b) gilt: $(c,d) + (a,b) = (c,d)$ für alle Vektoren (c,d)?*

Wir möchten auch von der *Länge* eines Vektors reden. Wir definieren daher:

Definition 4 *Der* Betrag *oder die* Länge *eines Vektors (a,b) in der Ebene ist:*

$$|(a,b)| := \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Dies erklärt sich mit dem Satz von Pythagoras (s. Abb. 5). Normierte *Vektoren haben die Länge* 1*; offenbar können wir außer* $(0,0)$ *jeden Vektor* (a,b) *durch Multiplikation mit dem Faktor* $\frac{1}{|(a,b)|}$ *normieren, d.h. auf Länge* 1 *strecken oder kürzen.*

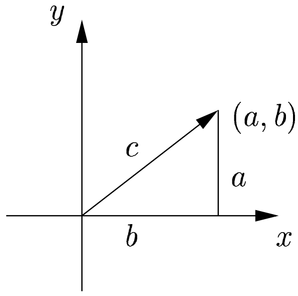

Abbildung 5: Der Betrag (oder die Länge) eines Vektors berechnet sich nach dem Satz von Pythagoras: $|(a,b)| = c = \sqrt{a^2+b^2}$.

Wir haben inzwischen einige Operationen kennengelernt, die wir mit Vektoren der Ebene ausführen können, doch die Multiplikation eines Vektors mit einem anderen Vektor haben wir noch nicht definiert. Der Grund dafür ist, daß diese Definition auf den ersten Blick nicht sehr natürlich erscheint; wir werden im nächsten Unterabschnitt aber sehen, daß es genau die richtige ist:

Definition 5 *Sind* (a,b) *und* (c,d) *zwei Vektoren von reellen Zahlen, so definieren wir die Multiplikation:*

$$(a,b)\cdot(c,d) := (ac-bd, ad+bc).$$

Beispiel 2 *Auch für die Multiplikation ein paar Beispiele:*

- $(2,3)\cdot(1,0) = (2,3)$,
- $(7,5)\cdot(0,0) = (0,0)$,
- $(2,0)\cdot(3,7) = (6,14)$,
- $(0,1)\cdot(0,1) = (-1,0)$,
- $(0,1)\cdot(1,1) = (-1,1)$.

Definition 6 *Zu einem Vektor* (a,b) *notieren wir* $\overline{(a,b)} := (a,-b)$.

Eigenschaften 1 *Es gilt:*

- *Das* neutrale Element *bzgl. der Multiplikation von Vektoren in der Ebene ist* $(1,0)$*, d.h.* $(a,b)\cdot(1,0)=(a\cdot 1-b\cdot 0, a\cdot 0-b\ cdot1)=(a,b)$ *für alle Vektoren* (a,b)*.*
- *Für alle Vektoren* (a,b) *gilt:*

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{|(a,b)|^2}\cdot(a,b)\cdot\overline{(a,b)} \\
= & \frac{1}{|(a,b)|^2}\cdot(a^2+b^2,0) \\
= & \frac{1}{a^2+b^2}\cdot(a^2+b^2,0) \\
= & (1,0).
\end{aligned}$$

- *Das* Inverse *eines Vektors* (a,b) *ist also:*

$$(a,b)^{-1}:=\frac{1}{|(a,b)|^2}\cdot\overline{(a,b)}.$$

Auch zu diesen Begriffen ein paar Aufgaben:

Aufgaben 2 *Berechne:*

- $(1,0)^{-1}$,
- $(0,1)^{-1}$,
- $(3,4)\cdot\overline{(3,4)}$,
- $\frac{1}{|(3,4)|}\cdot(\frac{1}{5},0)$.

2.3 Das Symbol i

Erstaunlicherweise war es erst 1833 der Ire Sir William R. Hamilton, der auf die Idee kam, die komplexen Zahlen so zu behandeln, wie im letzten Unterabschnitt beschrieben.

Damit das Rechnen mit diesen Vektoren noch einfacher wird, führen wir die folgenden Abkürzungen ein:

Definition 7 *Wir schreiben:*

$$\begin{aligned}
1 &:= (1,0), \\
i &:= (0,1).
\end{aligned}$$

Eigenschaften 2 *Wie weiter oben gesehen (Bsp. 2, Aufg. 2), gilt mit den neuen Notationen:*

- $i^2 = (0,1) \cdot (0,1) = -1$,
- $i^{-1} = (0,1)^{-1} = (0,-1) = -i$,
- *Sei* $a \in \mathbf{R}$. *Dann:* $a = a \cdot 1 = a \cdot (1,0) = (a,0)$,
- *Seien* $a, b \in \mathbf{R}$. *Dann:* $a + b \cdot i = (a,0) + b \cdot (0,1) = (a,0) + (0,b) = (a,b)$,
- *Auch die sog.* komplexe Konjugation *ist sehr einfach:*

$$\begin{aligned} \overline{a + i \cdot b} &= \overline{(a,0) + (0,1) \cdot (b,0)} \\ &= \overline{(a,0) + (0,b)} \\ &= \overline{(a,b)} \\ &= (a,-b) \\ &= a - i \cdot b. \end{aligned}$$

Beispiel 3 *Einige Beispiele zur neuen Notation:*

- $(3,0) \cdot (1,0) = 3 \cdot 1 = 3 = (3,0)$,
- $3 + 5 \cdot i = (3,0) + 5 \cdot (0,1) = (3,0) + (0,5) = (3,5)$,
- *Die* komplexe Konjugation*:*

$$\overline{3 + i \cdot 5} = (3,-5) = 3 - i \cdot 5.$$

Beispiel 4 *Mit dieser Notation läßt sich jetzt viel einfacher rechnen.*

- $(3 + i \cdot 5) - (7 + i \cdot 5) = 3 - 7 + i \cdot 5 - i \cdot 5$

Vor allem vereinfacht sich die Multiplikation. Man muß sich nicht mehr die komplizierte Formel merken, sondern multipliziert einfach aus und faßt anschließend zusammen:

- *Bei zwei Faktoren sieht das so aus:*

$$\begin{aligned} (3 + 5i) \cdot (7 + 2i) &= 3 \cdot 7 + 3 \cdot 2i + 5i \cdot 7 + 5i \cdot 2i \\ &= 21 + 6i + 35i + 10i^2 \\ &= 21 + 41i - 10 \\ &= 11 + 41i. \end{aligned}$$

- *Ein Beispiel mit drei Faktoren:*

$$\begin{aligned} (1+i)(2+i)(3+i) &= \underbrace{(2 + i + 2i + i^2)}_{=1+3i} \cdot (3+i) \\ &= 3 + i + 9i + 3i^2 \\ &= 10i. \end{aligned}$$

3 Die Polar-Schreibweise

Eine weitere Schreibweise der komplexen Zahlen ist für gewisse Anwendungen nützlich, die sog. Polar-Schreibweise.

Definition 8 *Sei $x \in \mathbf{R}$. Dann definieren wir die Exponentialfunktion folgendermaßen für alle komplexen Zahlen ohne reellen Anteil:*

$$e^{ix} := \sin x + i \cos x.$$

Läuft x also von 0 bis 2π, dann läuft e^{ix} einmal auf dem Einheitskreis herum (s. Abb. 6).

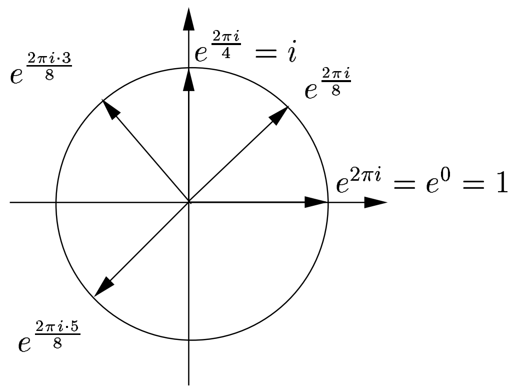

Abbildung 6: Läuft x von 0 bis 2π, so läuft e^{ix} einmal auf dem Einheitskreis herum.

Definition 9 *Mittels e^{ix} bekommen wir also alle Zahlen der komplexen Ebene, deren Betrag (oder Länge) 1 ist. Strecken oder stauchen wir nun diese Vektoren der Ebene, so können wir jede komplexe Zahl in der sog. Polarschreibweise darstellen:*

$$z = |z| \cdot e^{i\mathrm{arg}(z)},$$

wobei sich $\arg(z)$ *über das in Abb. 7 eingezeichnete Dreieck ermitteln läßt.*

Definition 10 *Die Exponentialfunktion können wir für alle komplexen Zahlen definieren, indem wir das Gesetz*

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y$$

auf komplexe Zahlen ausweiten. Damit berechnet sich:

$$e^{a+ib} = e^a \cdot e^ib.$$

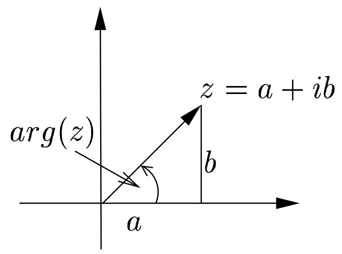

Abbildung 7: Das Argument einer komplexen Zahl berechnet sich leicht über ein rechtwinkliges Dreieck.

3.1 Die Geometrie Multiplikation mit i

Mit der Polar-Schreibweise läßt sich nun die Geometrie der komplexen Zahlen ein wenig besser verstehen.

Eigenschaften 3 *Seien* $z_1 = k_1 \cdot e^{ix_1}$*, und* $z_2 = k_2 \cdot e^{ix_2}$, $k_1, x_1, k_2, x_2 \in \mathbf{R}$ *zwei komplexe Zahlen. Dann ist:*

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= k_1 \cdot e^{ix_1} \cdot k_2 \cdot e^{ix_2} \\ &= k_1 \cdot k_2 \cdot e^{i(x_1+x_2)}. \end{aligned}$$

Um zwei komplexe Zahlen zu multiplizieren, müssen wir also deren Längen multiplizieren und deren Argumente addieren.

Beispiel 5 *Betrachten wir dazu einige Beispiele:*

- *Sei* $z = k \cdot e^{ix}$, $k, x \in \mathbf{R}$ *eine komplexe Zahl. Dann ist*

  $$z \cdot i = k \cdot e^{ix} \cdot e^{\frac{\pi i}{2}} = k \cdot e^{i(x+\frac{\pi}{2})}.$$

  Die Multiplikation mit i entspricht also gerade einer Drehung um den Ursprung um $\frac{\pi}{2}$*, was in Grad ausgedrückt* $90°$ *gegen den Urzeigersinn entspricht.*

- *Wir hatten bereits berechnet:* $(1+i)(2+i)(3+i) = 10i$*. Geometrisch bedeutet dies, daß die Summe der drei Argumente gerade* $90°$ *ergibt (s. Abb. 8.*

3.2 n-te Einheits-Wurzeln

Mit der geometrischen Betrachtungsweise des vorherigen Abschnitts können wir uns jetzt fragen, wo die komplexen Zahlen liegen, deren n-te Potenz 1 ist.

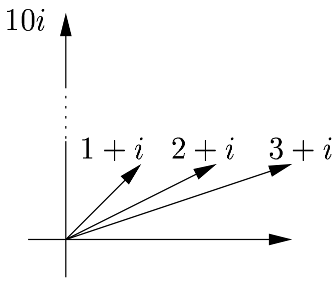

Abbildung 8: Die Summe der Argumente von $1+i$, $2+i$ und $3+i$ ist $\frac{\pi}{2}$, was $90°$ entspricht.

Für $n = 2$ kennen wir die Antwort schon: $(-1)^2 = 1$ und $1^2 = 1$.

Da $i^2 = -1$ ist, kennen wir auch zwei Zahlen (außer natürlich -1 und 1), deren vierte Potenz 1 ist, nämlich i und $-i$:

$$(-i)^4 = (-1)^4 \cdot i^4 = i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1.$$

Insgesamt gibt es also 4 sog. vierte Einheitswurzeln:

$$1 = e^0, i = e^{\frac{\pi}{2}}, -1 = e^{\pi}, -i = e^{\frac{3\pi}{4}}.$$

Auf der Abb. 6 sind einige der acht 8-ten Einheitswurzeln schon eingezeichnet. Was ist übrigens das Quadrat der achten Einheitswurzel $e^{\frac{2\pi i}{8}}$?

Aber natürlich können wir auch allgemein n-te Einheitswurzeln betrachten für beliebige $n \in \mathbf{N}$. Man hat:

$$\left(e^{\frac{2k\pi i}{n}}\right)^n = e^{\frac{2k\pi in}{n}} = e^{2k\pi i} = \left(e^{2\pi i}\right)^k = 1^k = 1$$

für alle ganzen Zahlen $k \in \mathbf{Z}$.

4 Anwendungen

4.1 Gamovs Problem

Siehe [1].

Literatur

[1] Paul J. Nahin (1998): The Story of $\sqrt{-1}$. Princeton University Press.

[2] The MacTutor History of Mathematics archive,
`http://www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/~history/index.html`