Geometrie - Vermessung der Erde

Prof. Dr. Duco van Straten und Oliver Labs

7.11.2001

Einführung

Das Gebiet der algebraischen Geometrie beschäftigt sich zum einen mit geometrischen und zum anderen mit algebraischen Problemen. Genauer gesagt ist seit Descartes bekannt, daß beides nur verschiedene Sichtweisen desselben sind.

Ist also beispielsweise ein geometrisches Problem gegeben, das zu kompliziert erscheint, um mit geometrischen Mitteln gelöst zu werden, übersetzt man zunächst in die algebraische Sprache, löst es, und übersetzt die Lösung wiederum in die geometrische Sprache. Häufig vereinfacht diese (oder die umgekehrte) Vorgehensweise eine Aufgabenstellung enorm.

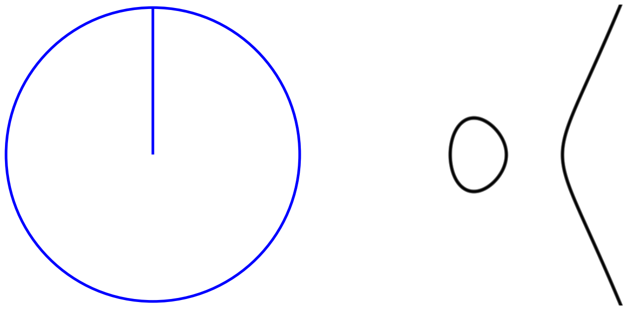
Kurven

Betrachten wir zunächst die (wohl) einfachsten Objekte der algebraischen Geometrie: ebene Kurven, d.h. Nullstellenmengen von Polynomen in zwei Variablen. Zwei Beispiele, jeweils deren geometrisches Gebilde und deren algebraische Gleichung, sind in Abb. 1 (S. 2) zu sehen.

Eines der einfachsten Objekte der Geometrie, den Kreis, wollen wir in den folgenden Abschnitten näher untersuchen und einige Beispiele für die Nützlichkeit der Geometrie am Kreis vorstellen. Die andere Abbildung zeigt eine sog. *elliptische Kurve*, deren Gleichung sich zwar auf den ersten Blick nicht so stark von der eines Kreises unterscheidet, die aber schon wesentlich komplizierter ist (s. auch den Abschnitt über pytagoräische Tripel).

Erathostenes

Sogar der Begriff *Geometrie* hat viel mit dem Kreis zu tun (Geos $\cong$ Erde, Metrios $\cong$ messen). Mit Hilfe von Geometrie am Kreis hat Erathostenes nämlich beispielsweise den Umfang der Erde bestimmt.



$x^2 + y^2 = 1$ $\qquad$ $y^2 = x^3 - x$

Abbildung 1: Ein Kreis und eine elliptische Kurve

Er nahm an, dass die Erde approximativ eine Kugel darstellt. Er wußte, daß in Syene (in der Nähe von Assuan) die Sonne um 12 Uhr exakt im Zenith stand. Zu dieser Uhrzeit maß er in Alexandria, das etwa 5.000 Stadien von Alexandria entfernt lag, den Winkel α, den die Sonne mit dem Zenith bildete (s. Abb.): $\alpha \cong \frac{360°}{50}$.

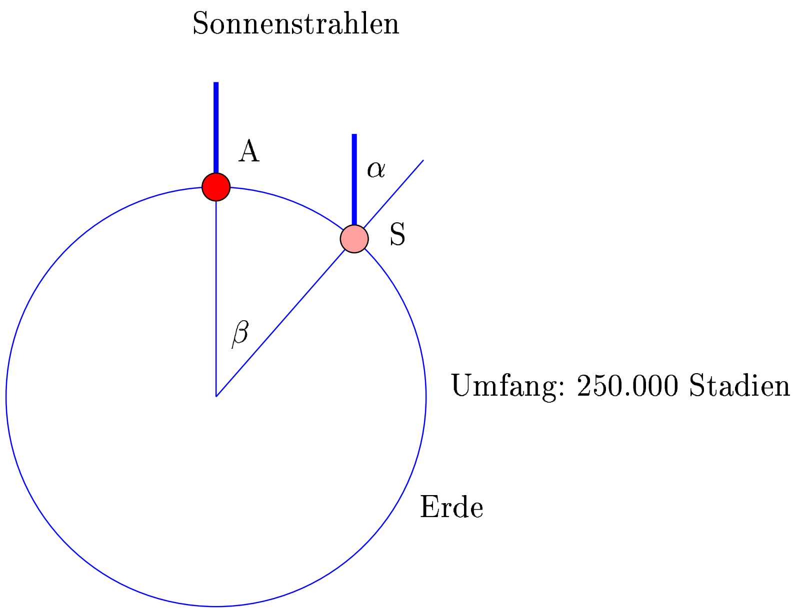


Abbildung 2: Erathostenes' Methode zur Berechnung des Erdumfangs

Da offenbar $\alpha = \beta$ gilt, konnte Erathostenes den Erdumfang approximativ zu $50 \cdot 5.000 = 250.000$ Stadien bestimmen, was in heutigen Einheiten etwa 46.000 km entspricht, also keine schlechte Näherung darstellt. Heute ist nämlich

$$1\ m = \frac{1}{40.000.000} \cdot \text{Meridian von Paris } m.$$

J. Kapteyn

Eine andere Methode, den Umfang der Erde zu messen, schlug der Astronom J. Kapteyn (1851-1922) vor.

Steht man abends am Strand und betrachtet den Sonnenuntergang, so sieht man diesen einige Zeit später als jemand, der $10m$ höher auf einer Düne steht. Aus dem Zeitunterschied t kann man den Erdumfang approximativ ermitteln, wenn man wiederum annimmt, die Erde sei eine Kugel.

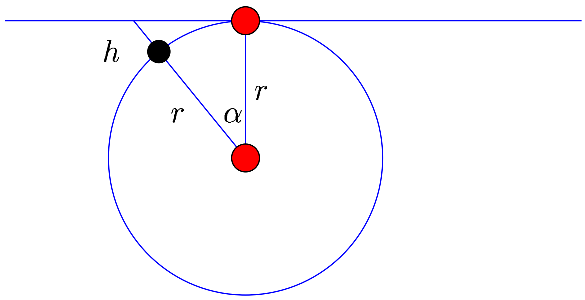


Abbildung 3: Kapteyns Methode zur Berechnung des Erdumfangs

Betrachten wir nämlich die Abbildung, so sehen wir, daß

$$cos(\alpha) = \frac{r}{r+h}.$$

Auch ohne Taschenrechner kann man damit den angesprochenen Zeitunterschied recht gut approximativ ausrechnen - wie? Zur Lösung dieser Aufgabe s. 6.

Pytagoräische Tripel

Eine ähnliche Konstruktion können wir benutzen, um unendlich viele Pytagoräische Tripel zu konstruieren:

Man kann den Kreis parametrisieren, indem man einen Punkt $Q(t)$ auf der Tangente an einen Kreis k durch einen Punkt P laufen läßt und jeweils den Schnittpunkt $S(t)$ des Kreises mit der Verbindungslinie von $Q(t)$ und dem Punkt R, der bzgl. des Kreismittelpunktes dem Punkt P gegenüberliegt, betrachtet (s. Abb.).

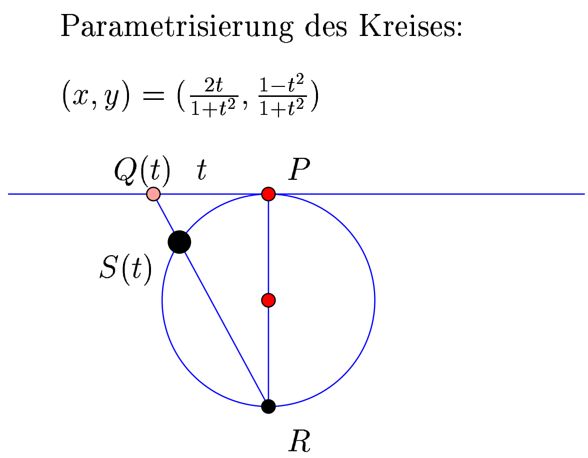


Abbildung 4: Eine Parametrisierung des Kreises

Für rationale $t = \frac{m}{n}$ ergibt sich, wenn man diese Parametrisierung in die Kreisgleichung einsetzt:

$$(2nm)^2 + (n^2 - m^2)^2 = (n^2 + m^2)^2.$$

Für beliebige $n, m \in \mathbf{N}$ ergeben sich also pytagoräische Tripel, d.h. drei natürliche Zahlen a, b, c, die den Satz von Pytagoras erfüllen: $a^2 + b^2 = c^2$. Man erhält so also unendlich viele solche Tripel - dies war sogar den Griechen schon bekannt!

Was aber erst seit wenigen Jahren bekannt ist und von Fermat (1601-1665) vermutet wurde, ist die Tatsache, daß die Gleichung

$$a^n + b^n = c^n$$

für natürliche Zahlen a, b, c keine Lösung hat für $n > 2$! Der Beweis dieses sog. letzten Satzes von Fermat basiert übrigens im Wesentlichen auf dem Beweis einer Vermutung über elliptische Kurven (s. Abbildung im Abschnitt über Kurven).

Jogging

Nehmen wir einmal an, Herr Meier jogged 10 km geradeaus von A nach B. Nehmen wir weiter an, die Erde sei eine Kugel und betrachten wir diese Situation von der Seite, so ergibt sich das Bild in Abb. 5:

Es scheint also, als laufe Herr Meier über einen 'Berg' der Höhe b - wie groß ist b?

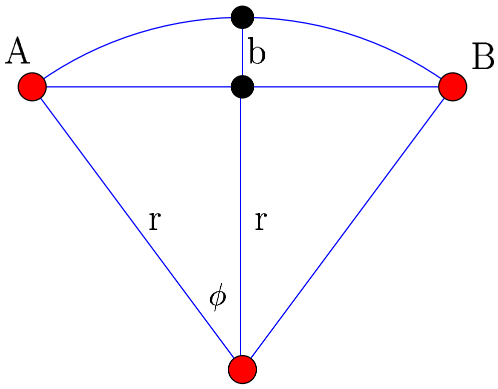


Abbildung 5: Jogging auf der Erdkugel

Lösungen

Jogging

1. Lösung

Man hat: $cos\phi = \frac{r-b}{r}$. Daher gilt: $b = r(1-cos\phi)$. Da der Umfang eines Kreises $2\pi r$ ist, können wir den Winkel ϕ im Bogenmaß aus folgender Gleichung ermitteln: $\frac{\phi}{2\pi} = \frac{\frac{1}{2}AB}{2\pi r} \Leftrightarrow \phi = \frac{AB}{2r}$.

Um b zu berechnen, benötigen wir also nur noch den Cosinus dieses Winkels. Da wir aber nur an einer Näherungslösung interessiert sind, brauchen wir nicht den Taschenrechner zu bemühen, sondern können die folgenden sog. Reihendarstellung des Cosinus benutzen

$$cos\phi = 1 - \frac{\phi^2}{2!} + \frac{\phi^4}{4!} - \frac{\phi^6}{6!} + \cdots$$

und sie einfach nach dem zweiten Term abbrechen.

Wir erhalten so: $b \cong r \cdot \frac{\phi^2}{2} = \frac{(AB)^2}{8r} \cong \frac{(AB)^2}{50.000} = \frac{100}{50.000}km = 2m$. Der Fehler, den wir beim Abschneiden machen, ist sehr klein, denn in unserem Fall ist ϕ sehr nahe bei null und schon für $|\phi| < \frac{1}{10}$ ist $\phi^4 < \frac{1}{10000}$ und höhere Potenzen sind noch unwichtiger. Wir sind sowieso nur an Größenordnungen interessiert - beispielsweise haben wir ja auch $8r \cong 50.000$ angenommen.

2. Lösung

Auf genau dieselbe Näherung können wir auch kommen, ohne den Cosinus eines Winkels zu approximieren:

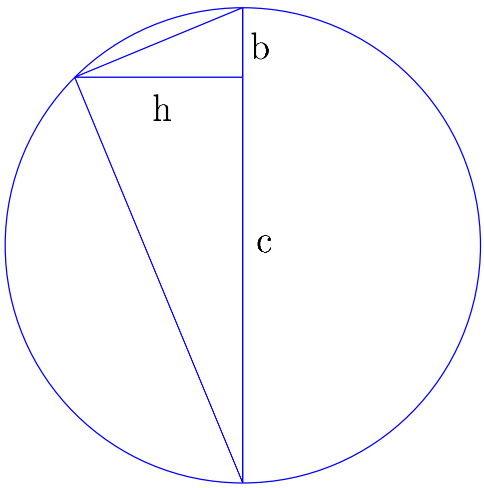


Abbildung 6: Näherung ohne Cosinus-Berechnung

Da die beiden Teildreiecke in der Zeichnung (Abb. 6) offenbar kongruent sind, gilt nämlich: $b = \frac{h^2}{c} \cong \frac{(AB)^2}{4 \cdot 2 \cdot r} = \frac{(AB)^2}{8r}$.

Kapteyn

Wie in der obigen Lösung können wir den Cosinus approximieren: $cos\ \alpha \cong 1 - \frac{\alpha^2}{2}$. Wir erhalten somit: $1 - cos\alpha = \frac{r+h-r}{r+h} = \frac{h}{r+h} \cong \frac{\alpha^2}{2}$ und daraus: $\alpha \cong \sqrt{\frac{2h}{r+h}} \cong \sqrt{\frac{20}{6400000}} = \frac{\sqrt{2}}{8 \cdot 10^2} \cong 2 \cdot 10^{-3}$. Letztendlich erhalten wir also für den gefragten Zeitunterschied: $\Delta t \cong \frac{24 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{2\pi} \cong 7 \cdot 3.6 \cong 25$ [sek.].

Diese Methode ist also wirklich praktikabel - trotzdem scheint sie den Griechen nicht bekannt gewesen zu sein! Unseres Wissens war Kapteyn im 19. Jahrhundert der erste, der sie vorschlug.

Literatur

Prof. Dr. R. Böhme: Erdvermessung und Geometrie im Laufe der Zeit, http://homepage.ruhr-uni-bochum.de/Reinhold.Boehme/ringvorlesung/ringvorlesung.html

Simon Singh: Fermats letzter Satz

The MacTutor History of Mathematics archive, http://www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/ history/index.html