Rationale Zahlen einmal anders: Die Fareysche Kreispackung

Annette A'Campo-Neuen

Mainz, 22. Mai 2002

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

In der Schule lernt man üblicherweise die geometrische Beschreibung der reellen Zahlen als Punkte auf der Zahlengeraden kennen. Für die Teilmenge der rationalen Zahlen gibt es noch eine andere, weniger bekannte Beschreibung durch Kreise in der oberen Halbebene, die wir im folgenden vorstellen möchten. Es wird sich zeigen, daß diese Kreise dabei helfen können, zu einer vorgegebenen irrationalen Zahl die "besten" Näherungsbrüche zu finden.

2 Farey-Reihen

Der Geologe John Farey (1766-1826) veröffentlichte im Jahr 1816 im Philosophical Magazine einen Artikel *A curious property of vulgar fractions*, in dem er auf eine merkwürdige Eigenschaft gewöhnlicher Brüche hinwies, und die Mathematiker unter den Lesern der Zeitschrift dazu aufforderte, dafür eine Erklärung zu geben.

Diese Eigenschaft hängt mit der "falschen" Addition von Brüchen zusammen, vor der man in der Schule immer gewarnt wird. Sind a/b und c/d zwei gekürzte Brüche, so wollen wir den Bruch $(a+c)/(b+d)$ als *Median* zwischen a/b und c/d bezeichnen. Sei jetzt n eine natürliche Zahl. Schreibt man die gekürzten Brüche zwischen 0 und 1, deren Nenner jeweils n nicht übersteigt, der Größe nach geordnet auf, so erhält man eine Folge von Zahlen F_n, die sogenannte n-te *Fareysche Zahlenreihe*. Die ersten vier dieser Zahlenreihen sind:

$$\begin{aligned} F_1 &= \{0,1\} \\ F_2 &= \left\{\frac{0}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{1}\right\} \\ F_3 &= \left\{\frac{0}{1},\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{1}{1}\right\} \\ F_4 &= \left\{\frac{0}{1},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{1}{1}\right\} \end{aligned}$$

Farey war dabei folgendes aufgefallen:

Satz 1 *Bei drei aufeinanderfolgenden Brüchen in der Folge F_n ist jeweils der mittlere der Median zwischen seinem Vorgänger und seinem Nachfolger.*

Zum Beispiel finden wir in F_3:

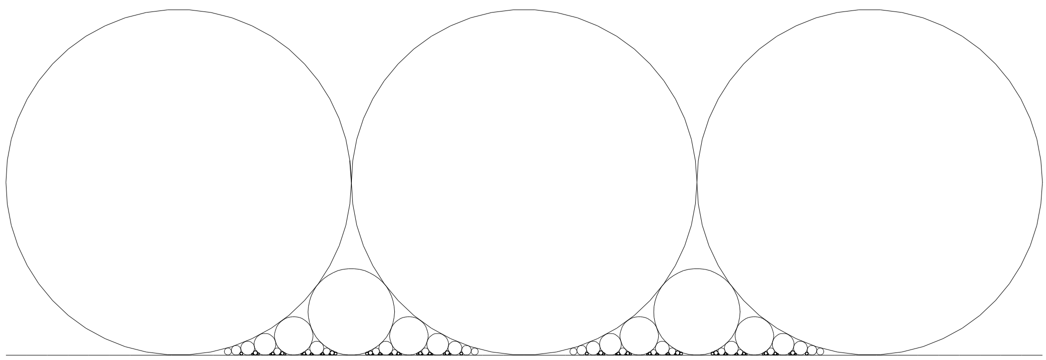
$$\frac{1}{3}=\frac{0+1}{1+2}, \quad \frac{1}{2}=\frac{1+2}{3+3}\,.$$

Aufgabe 1 *Fareys Beobachtung für die Brüche in F_4 verifizieren.*

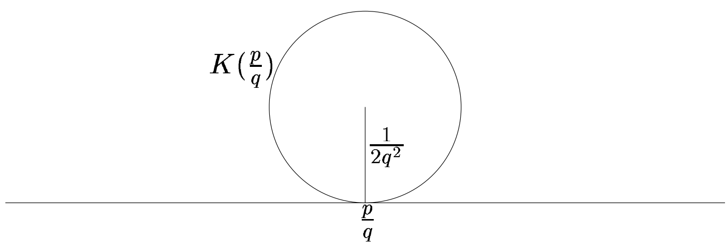
Einen Beweis für Fareys Beobachtung lieferte noch im selben Jahr A.-L. Cauchy, und wir werden im Paragraph 5 darauf zurückkommen. Zunächst wollen wir die Medianbildung aber mit Kreisen geometrisch interpretieren.

3 Fareysche Kreispackung

Man kann jeder rationalen Zahl einen Kreis in der oberen Halbebene zuordnen, und zwar auf eine solche Weise, daß die Gesamtheit der Kreise eine Kreispackung mit sehr interessanten Eigenschaften bildet. Diese Entdeckung schreiben Conway und Guy in ihrem Buch *The Book of Numbers* von 1995 Lester Ford zu und sprechen daher von den Fordschen Kreisen (siehe [3]). Die Kreispackung wurde aber tatsächlich schon früher entdeckt. Unter anderem hat sie Andreas Speiser zu Anfang des 20. Jahrhunderts untersucht. Sein Schüler Jean Züllig hat darüber 1928 ein hübsches Buch geschrieben (siehe [2]), und er spricht von der *Speiserschen Kreisfigur*.



Den Kreis zu einer rationalen Zahl r erhält man so: Man schreibt r als gekürzten Bruch p/q und trägt p/q auf der x-Achse ab. Hebt man diesen Punkt in y-Richtung um $1/2q^2$ an, findet man den Punkt mit den Koordinaten $(p/q, 1/2q^2)$. Um diesen Punkt schlägt man einen Kreis vom Radius $1/2q^2$. Der Kreis berührt also die x-Achse im Punkt p/q. Wir wollen ihn mit $K(p/q)$ bezeichnen.

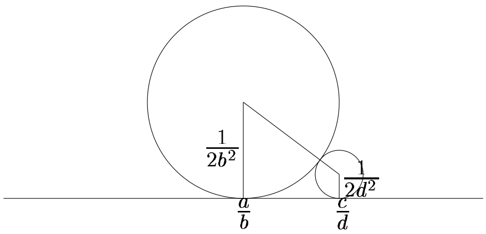


Wir können folgende Beobachtungen festhalten:

Beobachtung 1 *Zwei Kreise $K(a/b)$ und $K(c/d)$ berühren sich genau dann, wenn gilt*

$$bc - ad = \pm 1.$$

(Genauer ist $bc - ad = 1$, wenn $K(a/b)$ links von $K(c/d)$, und $bc - ad = -1$, wenn $K(a/b)$ rechts von $K(c/d)$ liegt.)



Denn: Die Kreise $K(a/b)$ und $K(c/d)$ berühren sich, wenn der Abstand ihrer Mittelpunkte mit der Summe ihrer Radien übereinstimmt. In einer Gleichung ausgedrückt, heißt das:

$$\left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right)^2 + \left(\frac{1}{2b^2} - \frac{1}{2d^2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2b^2} + \frac{1}{2d^2}\right)^2.$$

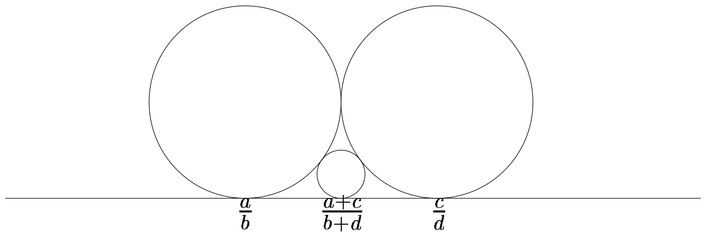
Durch Umformung folgt daraus die Behauptung. *q.e.d.*

Beobachtung 2 *Wenn sich zwei verschiedene Kreise nicht berühren, dann schneiden sie sich auch nicht. Die Menge aller Kreise bildet also eine Kreispackung.*

Denn: Seien a/b und c/d zwei gekürzte Brüche. Dann ist $bc - ad =: d$ eine ganze Zahl, und es gibt nur die Möglichkeiten $d = 0$, $d = \pm 1$ oder $|d| > 1$. Im ersten Fall stimmen die Brüche überein, im zweiten Fall berühren sich die Kreise $K(a/b)$ und $K(c/d)$ und im dritten Fall ist der Abstand der Kreismittelpunkte der Kreise echt größer als die Summe der Radien (siehe oben). Also können sich die Kreise nicht schneiden. *q.e.d.*

Und hier eine hübsche geometrische Interpretation des durch "falsche" Addition von Brüchen gewonnenen Medians:

Beobachtung 3 *Zu je zwei sich berührenden Kreisen $K(a/b)$, $K(c/d)$ (mit $a/b < c/d$) gibt es genau einen dritten Kreis zwischen beiden, der beide berührt, nämlich $K(\frac{a+c}{b+d})$. Wir nennen ihn den Mediankreis.*

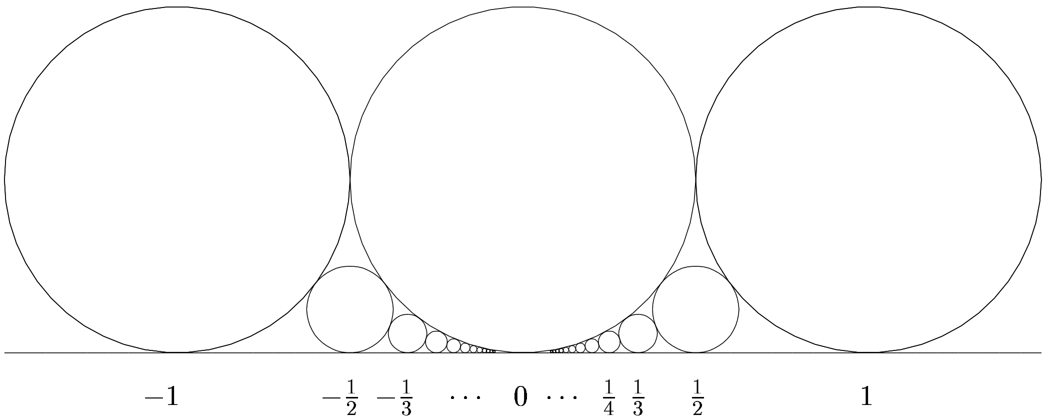


Man kann die Behauptung nachprüfen, indem man die Beziehung aus Beobachtung 1 nachrechnet.

Aufgabe 2 *Zeigen Sie: Alle Berührpunkte der Kreisfigur haben rationale Koordinaten und auf jedem Kreis der Form $K(p/q)$ liegen unendlich viele Punkte mit rationalen Koordinaten.*

4 Nachbarkreise

Mit den Nachbarn eines Kreises meinen wir diejenigen Kreise aus der Speiserschen Kreisfigur, die den gegebenen berühren. In diesem Abschnitt wollen wir alle Nachbarn eines gegebenen Kreises beschreiben. Schauen wir uns zunächst ein Beispiel an.



Beispiel 1 *Die größten Nachbarn von $K(0)$ sind die Kreise $K(\pm 1)$. Die nächstkleineren Nachbarn von $K(0)$ sind die Mediankreise von $K(\pm 1)$ mit $K(0)$, also die Kreise $K(\pm 1/2)$. Durch fortgesetztes Bilden von Mediankreisen erhalten wir sämtliche weiteren Nachbarn von $K(0)$, nämlich die Kreise zu allen Stammbrüchen $K(\pm 1/q)$.*

Allgemein gilt: Ein gegebener Kreis $K(p/q)$ hat stets zwei größte Nachbarkreise, einen von rechts und einen von links. Alle weiteren Nachbarn ergeben sich durch fortgesetztes Bilden von Mediankreisen. Ist etwa der größte rechte Nachbar $K(x_0/y_0)$, so sind alle weiteren rechten Nachbarn von der Form $K\left(\dfrac{x_0+np}{y_0+nq}\right)$.

Aufgabe 3 *Alle Nachbarn von $K(1/2)$ bestimmen.*

Wir können die Ausgangsfrage auch algebraisch formulieren. Ein Kreis der Form $K(x/y)$ berührt den gegebenen Kreis $K(p/q)$ genau dann (von rechts), wenn gilt:

$$qx - py = 1\,. \tag{1}$$

Die Frage nach den Nachbarkreisen ist also äquivalent dazu, sämtliche Lösungen $(x,y) \in \mathbb{Z}$ der sogenannten *diophantischen* Gleichung (1) zu bestimmen. Und dem größten rechten Nachbarn $K(x_0/y_0)$ entspricht die Lösung (x_0, y_0) der diophantischen Gleichung, bei der y_0 minimal ist.

Weil p und q teilerfremd sind, hat die diophantische Gleichung Lösungen. Und man kann eine minimale Lösung aus dem *Euklidischen Algorithmus* ablesen.

Zur Erinnerung: Der Euklidische Algorithmus ist ein Verfahren, ausgehend von natürlichen Zahlen $1 \leq p < q$, den größten gemeinsamen Teiler von p und q zu bestimmen. Dazu teilt man zuerst q mit Rest durch p, dann teilt man p durch den Rest usw., bis schließlich die Teilung aufgeht. Man findet also natürliche Zahlen a_i, r_i mit:

$$\begin{array}{rcll}
q & = & a_1 p + r_1, & r_1 < p \\
p & = & a_2 r_1 + r_2, & r_2 < r_1 \\
 & \vdots & & \\
r_{n-3} & = & a_{n-1} r_{n-2} + r_{n-1}, & r_i < r_{i-1} \\
r_{n-2} & = & a_n r_{n-1} &
\end{array}$$

Im letzten Schritt bleibt kein Rest, das heißt r_{n-1} teilt den vorigen Rest r_{n-2}. Die Zahl $d := r_{n-1}$ ist gerade der gesuchte größte gemeinsame Teiler von p und q. Löst man jeweils die i-te Gleichung nach r_i auf und setzt in die folgende Gleichung ein, so erhält man schließlich eine Darstellung von d als

Linearkombination von p und q der Form $(-1)^n d = xq - yp$ (x, y natürliche Zahlen).

Sind p und q teilerfremd, so ist ihr größter gemeinsamer Teiler gleich 1 und das Verfahren führt auf eine minimale Lösung der Gleichung $qx - py = \pm 1$.

Beispiel 2 *$q = 17$, $p = 5$. Der Euklidische Algorithmus besteht hier aus drei Schritten:*

$$\begin{aligned} 17 &= 3 \cdot 5 + 2 \\ 5 &= 2 \cdot 2 + 1 \\ 2 &= 2 \cdot 1. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich: $1 = 5 - 2 \cdot 2 = 5 - 2(17 - 3 \cdot 5) = -2 \cdot 17 + 7 \cdot 5$. *Also ist $K(2/7)$ ein größter Nachbarkreis, der $K(5/17)$ von links berührt. Da $K(5/17)$ der Mediankreis zwischen seinen größten Nachbarn ist, muß der größte rechte Nachbar der Kreis $K(3/10)$ sein.*

Noch eine Bemerkung zu den Symmetrien der von allen Kreisen gebildeten Kreispackung: Offensichtlich ist die Kreispackung symmetrisch bezüglich der y-Achse und der Spiegelungen an allen Parallelen der y-Achse durch Vielfache von $1/2$. Außerdem wird sie durch Verschiebungen um ganze Zahlen in x-Richtung in sich abgebildet wird. Es gibt aber noch eine weitere "Selbstähnlichkeit": Unter der folgenden Abbildung der oberen Halbebene in sich werden Kreise in Kreise abgebildet:

$$(a, b) \mapsto \left(\frac{-a}{a^2 + b^2}, \frac{b}{a^2 + b^2} \right) .$$

Dabei wird der Kreis $K(p/q)$ auf $K(-q/p)$ abgebildet. Die Abbildung respektiert auch Nachbarschaftsverhältnisse (nachrechnen!). Zum Beispiel die Kreise zu ganzzahligen Punkten gehen über in die Kreise zu den Stammbrüchen.

5 Generationenabfolge

Man kann alle Kreise rekursiv erzeugen, indem man folgendermaßen vorgeht. Die Kreise zu den ganzen Zahlen wollen wir als Kreise der ersten Generation betrachten:

$$K_1 := \{K(p/1) \mid p \in \mathbb{Z}\} .$$

In der zweiten Generation kommen die Mediankreise von jeweils zwei Nachbarn der ersten Generation hinzu:

$$K_2 := K_1 \cup \left\{ K\left(\frac{2n+1}{2}\right) \mid n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Und so geht es weiter, die n-te Generation von Kreisen K_n besteht aus den Kreisen der vorigen Generation zusammen mit den Mediankreisen zwischen jeweils zwei Nachbarn aus der vorigen Generation. Die Menge K_n bildet also eine Kette aus benachbarten Kreisen.

Die Menge der zu K_n gehörigen rationalen Zahlen bezeichnen wir mit B_n. Die ersten 5 Generationen sehen so aus:

$$\begin{aligned}
B_1 &= \{\ldots, 0, 1, \ldots\} \\
B_2 &= \{\ldots, 0, \frac{1}{2}, 1, \ldots\} \\
B_3 &= \{\ldots, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1, \ldots\} \\
B_4 &= \{\ldots, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, 1, \ldots\} \\
B_5 &= \{\ldots, 0, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, 1, \ldots\}
\end{aligned}$$

Satz 2 *(Cauchy) Jede rationale Zahl ist in einer der Mengen B_n enthalten.*

Denn: Zunächst einmal ergibt sich aus der Beschreibung sämtlicher Nachbarn eines gegebenen Kreises als iterierte Mediankreise folgendes: Gehört ein Kreis zur n-ten Generation von Kreisen, so liegen auch alle seine Nachbarn in einer der Mengen K_j. Deshalb reicht es, zu einem gegebenen Kreis $K(\frac{p}{q})$ eine Kette benachbarter Kreise zu konstruieren, die bei $K(\frac{p}{q})$ beginnt und bei einem Kreis der ersten Generation endet. Falls $q = 1$, besteht diese Kette nur aus einem einzigen Kreis. Andernfalls ist $q > 1$. Nehmen wir außerdem an, daß $p < q$ ist. Dann können wir wie vorhin mithilfe des Euklidischen Algorithmus Zahlen x_1, y_1 bestimmen, so daß $x_1 q - y_1 p = \pm 1$ und sogar $y < q$ gilt. Also ist der Kreis $K(\frac{x_1}{y_1})$ ein Nachbar von $K(\frac{p}{q})$, und zwar von größerem Radius. Zu $K(\frac{x_1}{y_1})$ konstruieren wir ebenso einen berührenden größeren Kreis $K(\frac{x_2}{y_2})$ und so weiter. Nach endlich vielen Schritten muß der Nenner y_i den Wert 1 annehmen. Wir sind also bei einem Kreis der ersten Generation angekommen. *q.e.d.*

Es liegt nahe zu fragen, wie man zu einem gegebenen gekürzten Bruch p/q die kleinste Generation B_n, in der p/q vorkommt, bestimmen kann. Hierzu nur soviel: Die Generation läßt sich aus dem Euklidischen Algorithmus für p und q ablesen.

Zusammenhang zu den Fareyschen Zahlenreihen. Ein gekürzter Bruch p/q muß wie eben gezeigt in einer der Mengen B_n vorkommen und zwar spätestens in der Menge B_q (denn bei Medianbildung erhöht sich ja der Nenner immer mindestens um 1). Also erhält man die n-te Fareysche Zahlenreihe F_n, indem man die gekürzten Brüche aus B_n zwischen 0 und 1 der Größe nach ordnet und alle diejenigen wegläßt, deren Nenner n übersteigt.

Um die Beobachtung von Farey einzusehen, reicht es sich klarzumachen, daß sie für die Mengen B_n gilt. Bei den jeweils neu hinzukommenden Brüchen ist dies nach Konstruktion klar, aber für die anderen Elemente ist doch noch etwas zu zeigen.

Aufgabe 4 *Man zeige per Induktion über n: Bei drei aufeinanderfolgenden Brüchen aus der Menge B_n ist jeweils der mittlere der Median zwischen seinem Vorgänger und seinem Nachfolger.*

6 Näherungsbrüche für irrationale Zahlen

Wir werden jetzt die Fareysche Kreispackung verwenden, um eine gegebene irrationale Zahl ω möglichst gut durch rationale Zahlen approximieren. Und zwar wollen wir eine Folge von Näherungsbrüchen p_n/q_n mit folgenden Eigenschaften konstruieren:

- $\frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2} < \frac{p_4}{q_4} < \ldots < \omega < \ldots < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_1}{q_1}$,
- $K\left(\frac{p_n}{q_n}\right)$ berührt $K\left(\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right)$.

Sind die gewünschten Eigenschaften erfüllt, muß nach der Charakterisierung von Nachbarkreisen gelten:

$$p_{n-1}q_n - q_{n-1}p_n = (-1)^n \, .$$

Daraus ergibt sich die Beziehung

$$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_{n-1}q_n} \, ,$$

und wir erhalten die Abschätzung:

$$|\omega - p_n/q_n| < \left| \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{q_n \cdot q_{n-1}} < \frac{1}{q_n^2}\,.$$

Der Bruch p_n/q_n ist durch diese Fehlerabschätzung bereits eindeutig festgelegt und ist insofern "die beste Näherung" für ω mit Nenner q_n.

Im Vergleich dazu schneiden Näherungen durch Dezimalbrüche im allgemeinen wesentlich schlechter ab. Wenn man ω nämlich als Dezimalzahl entwickelt und die Entwicklung bei der n-ten Stelle hinter dem Komma abbricht, erhält man eine Näherung mit Nenner 10^n, über die man im allgemeinen nur sagen kann, daß der Fehler höchstens 10^{-n} ist.

Bevor wir die gesuchten Näherungen beschreiben, definieren wir eine spezielle Intervallschachtelung, bestehend aus Intervallen mit rationalen Intervallgrenzen, die ω immer enger einschließen. Dazu gehen wir folgendermaßen vor:

1. Schritt: Wir bestimmen die beiden benachbarten Zahlen aus der ersten Generation B_1, zwischen denen ω liegt: $x_1 := [\omega] < \omega < x_1 + 1 =: y_1$; $I_1 := [x_1, y_1]$.

2. Schritt: Der Medianwert m_1 zwischen x_1 und y_1 teilt das Intervall I_1 in zwei Teile. Wir wählen $I_2 := [x_1, m_1]$, falls $\omega < m_1$ und $I_2 := [m_1, y_1]$, falls $\omega > m_1$. Die Intervallgrenzen von I_2 sind also diejenigen Zahlen x_2 und y_2 aus der zweiten Generation B_2, die ω am nächsten liegen.

$\vdots$

n-ter Schritt: Wir bilden den Medianwert m_{n-1} zwischen den vorigen Näherungen x_{n-1} und y_{n-1}, und stellen fest, ob ω kleiner oder größer als m_{n-1} ist. Je nachdem setzen wir $x_n := x_{n-1}$, $y_n := m$ oder $x_n := m$, $y_n := x'_{n-1}$. In jedem Fall sind dann x_n, y_n diejenigen Zahlen aus der n-ten Generation F_n, die ω am nächsten liegen.

Auf diese Weise erhalten wir eine Folge von Intervallen $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots$, deren Länge gegen Null geht und die allesamt ω enthalten.

Beispiel 3 *Die Intervallschachtelung für $\omega = \sqrt{2}$ sieht so aus:*

$$\begin{aligned} I_1 &= [1, 2] \\ I_2 &= [1, \frac{3}{2}] \\ I_3 &= [\frac{4}{3}, \frac{3}{2}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_4 &= [\frac{7}{5}, \frac{3}{2}] \\ I_5 &= [\frac{7}{5}, \frac{10}{7}] \\ I_6 &= [\frac{7}{5}, \frac{17}{12}] \\ I_7 &= [\frac{24}{17}, \frac{17}{12}] \\ &\vdots \end{aligned}$$

Aus der so konstruierten Intervallschachtelung für ω läßt sich eine Folge von Näherungsbrüchen p_n/q_n für die Zahl ω ablesen, die ω immer abwechselnd von unten und von oben annähern, und zwar:

Näherung nullter Ordnung: $p_0 := x_1 = [\omega]$, $q_0 := 1$.

Näherung erster Ordnung: Wir suchen in der Folge der Intervalle nach demjenigen Intervall I_{j_1}, bei dem zum letztenmal x_1 als untere Intervallgrenze auftritt, und schreiben die entsprechende obere Intervallgrenze y_{j_1} als gekürzten Bruch p_1/q_1.

Näherung zweiter Ordnung: Wir suchen nach demjenigen Intervall I_{j_2} in der konstruierten Folge von Intervallen, bei dem zum letztenmal p_1/q_1 als obere Intervallgrenze auftaucht und schreiben die entsprechende untere Intervallgrenze x_{j_2} als gekürzten Bruch p_2/q_2.

Näherung dritter Ordnung: Wir suchen nach dem Intervall I_{j_3}, bei dem zum letztenmal p_2/q_2 als untere Intervallgrenze auftaucht und schreiben die entsprechende obere Intervallgrenze x_{j_3} als gekürzten Bruch p_3/q_3.

$\vdots$

Es folgt aus der Konstruktion, daß die so definierten Näherungsbrüche tatsächlich die gewünschten Eigenschaften haben.

Beispiel 4 *Die ersten vier Näherungen für $\sqrt{2}$ lauten*

$$p_0/q_0 = 1, \quad p_1/q_1 = 3/2, \quad p_2/q_2 = 7/5, \quad p_3/q_3 = 17/12\,.$$

Der Fehler bei der Näherung dritter Ordnung beträgt hier sogar nur

$$\left|\sqrt{2} - \frac{17}{12}\right| < \frac{1}{400} < \frac{1}{144}\,.$$

Aufgabe 5 *Intervallschachtelung und Näherungsbrüche für eine weitere irrationale Zahl bestimmen.*

7 Näherungsbrüche für π

Wir wenden jetzt unser Verfahren auf die Zahl π an, und stossen dabei auf "klassische" Näherungsbrüche, die zum Teil schon in der Antike bekannt waren.

Beispiel 5 *Die Intervallschachtelung für die Zahl* $\pi = 3,141592653\ldots$ *lautet:*

$$\begin{aligned}
I_1 &= [3,4] \\
I_2 &= [3,\frac{7}{2}] \\
&\vdots \\
I_7 &= [3,\frac{22}{7}] \\
I_8 &= [\frac{25}{8},\frac{22}{7}] \\
&\vdots \\
I_{22} &= [\frac{333}{106},\frac{22}{7}] \\
I_{23} &= [\frac{333}{106},\frac{355}{113}] \\
I_{24} &= [\frac{688}{219},\frac{355}{113}] \\
&\vdots \\
I_{315} &= [\frac{103993}{33102},\frac{355}{113}] \\
I_{316} &= [\frac{103993}{33102},\frac{104348}{33215}]
\end{aligned}$$

Daraus lassen sich die folgenden Näherungsbrüche ablesen:

$$\begin{aligned}
\frac{p_0}{q_0} &= 3 \\
\frac{p_1}{q_1} &= \frac{22}{7} \\
\frac{p_2}{q_2} &= \frac{333}{106} = \frac{3+15\cdot 22}{1+15\cdot 7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{p_3}{q_3} &= \frac{355}{113} = \frac{333+22}{106+7}\\ \frac{p_4}{q_4} &= \frac{103993}{33102} = \frac{333+292\cdot 355}{106+292\cdot 113}\end{aligned}$$

Die Näherung erster Ordnung 22/7 war bereits Archimedes bekannt. Die Näherung dritter Ordnung 355/113 taucht angeblich schon in einer babylonischen Keilschrift auf (siehe [3]). Sie wurde in der nachantiken Zeit erstmals von Adrianus Metius (1571-1635) beschrieben. Diese Näherung ist bereits auf 6 Dezimalstellen genau, während der Nenner nur dreistellig ist. Die vierte Näherung ist auf 9 Dezimalstellen genau.

8 Rekursionsformeln für die besten Näherungsbrüche

Die Näherungsbrüche p_{n-1}/q_{n-1} und p_n/q_n sind die Intervallgrenzen des Intervalls I_{j_n} unserer Intervallschachtelung, also diejenigen rationalen Zahlen der Generation j_n, die ω am nächsten liegen. Schauen wir uns noch einmal an, wie die Zahlen j_i definiert waren.

Die ersten j_1 Intervalle haben alle diegleiche untere Intervallgrenze x_1, und die oberen Intervallgrenzen, die sich immer näher an ω heranschieben, sind iterierte Mediane mit x_1:

$$y_1 = x_1 + 1,\ y_2 = \frac{x_1 + y_1}{1+1} = \frac{2x_2+1}{2},\ \ldots\ , y_{j_1} = \frac{(j_1-1)x_1 + y_1}{(j_1-1)+1} = \frac{j_1 x_1 + 1}{j_1}\,.$$

Während $y_{j_1} = p_1/q_1$ eine obere Schranke für ω ist, muß der Median zwischen x_1 und y_{j_1} kleiner als ω sein. Denn sonst hätte das nächste Intervall I_{j_1+1} immer noch x_1 als untere Intervallgrenze. Wir können daher j_1 auch charakterisieren als diejenige natürliche Zahl, so daß

$$\frac{j_1 x_1 + 1}{j_1} > \omega > \frac{(j_1+1)x_1 + 1}{j_1 + 1}\,.$$

Die nächsten $j_2 - j_1$ Intervalle haben alle diegleiche obere Intervallgrenze $y_{j_1} = p_1/q_1$, und die unteren Intervallgrenzen, die sich immer näher an ω heranschieben, sind

$$x_{j_1+1} = \frac{p_0 + p_1}{q_0 + q_1}, \quad x_{j_1+2} = \frac{p_0 + 2p_1}{q_0 + 2q_1} = \frac{2x_2+1}{2}, \quad \ldots, x_{j_2} = \frac{p_0 + (j_2 - j_1)p_1}{q_0 + (j_2 - j_1)q_1}\,.$$

Die Zahl $x_{j_2} = p_2/q_2$ ist kleiner als ω, aber der Median zwischen p_2/q_2 und p_1/q_1 muß größer als ω sein. Denn sonst hätte das nächste Intervall immer noch p_1/q_1 als obere Intervallgrenze. Für die Differenz $(j_2 - j_1)$ gilt also

$$\frac{p_0 + (j_2 - j_1)p_1}{q_0 + (j_2 - j_1)q_1} < \omega < \frac{p_0 + (j_2 - j_1 + 1)p_1}{q_0 + (j_2 - j_1 + 1)q_1}.$$

Durch Induktion über n erhalten wir schließlich die folgenden Rekursionsformeln für unsere Näherungsbrüche p_n/q_n:

Näherung nullter Ordnung: $p_0 = [\omega] =: a_0, \quad q_0 = 1\,.$

Näherung erster Ordnung: $p_1 = 1 + a_1 p_0, \quad q_1 = a_1$, wobei $a_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{a_1 x_1 + 1}{a_1} > \omega > \frac{(a_1 + 1)x_1 + 1}{a_1 + 1}.$$

Näherung n-ter Ordnung: $p_n = p_{n-2} + a_n p_{n-1}, \quad q_n = q_{n-2} + a_n q_{n-1}$, wobei $a_n = j_n - j_{n-1}$ die Anzahl der übersprungenen Intervalle angibt. Falls n gerade, ist a_n durch die folgenden Ungleichungen festgelegt:

$$\frac{p_{n-2} + a_n p_{n-1}}{q_{n-2} + a_n q_{n-1}} < \omega < \frac{p_{n-2} + (a_n + 1)p_{n-1}}{q_{n-2} + (a_n + 1)q_{n-1}}.$$

Ist n ungerade, gelten die umgekehrten Ungleichungen.

9 Kettenbrüche

Wir können die Folge der in den Rekursionsformeln auftretenden Zahlen a_n als Koeffizienten der *unendlichen Kettenbruchentwicklung* der irrationalen Zahl ω interpretieren. Das heißt, es gilt:

Satz 3

$$\omega = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\cdots}}}.$$

Dies ergibt sich als Folgerung aus der folgenden Beobachtung:

Satz 4 *Seien wie eben p_n/q_n die besten Näherungsbrüche für eine irrationale Zahl ω, und seien $a_0, a_1, \ldots$ die in der Rekursionsformel dieser Näherungsbrüche auftretenden natürlichen Zahlen. Dann hat der Näherungsbruch $(n-1)$-ter Ordnung für die Zahl $\omega' := 1/(\omega - a_0)$ die Form*

$$\frac{1}{\frac{p_n}{q_n} - a_0}$$

und es gilt:

$$\begin{aligned} p'_0 &= a_1, \quad p'_1 = 1 + a_2 p'_0, \quad q'_1 = a_2 \\ p'_n &= p'_{n-2} + a_{n+1} p'_{n-1} \\ q'_n &= q'_{n-2} + a_{n+1} q'_{n-1} \end{aligned}$$

Die zugehörige Folge der natürlichen Zahlen a_n verschiebt sich also um eine Stelle nach vorn.

Denn: Wir definieren die Zahlen p'_n und q'_n durch $p'_n := q_{n+1}$ und $q'_n := p_{n+1} - a_0 q_{n+1}$. Nun kann man per Induktion beweisen, daß p'_n und q'_n zusammen mit der Folge $a_1, a_2, \ldots$ die Rekursionsformeln für Näherungbrüche von ω' erfüllt. Daraus folgt die Behauptung.

Aufgabe 6 *Diese Beweisidee ausführen.*

Beispiel 6 *Wir notieren die Kettenbruchentwicklung der Einfachheit halber in der Form $\omega = [a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots]$. Es gilt:*

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= [1; 2, 2, 2, 2, \ldots] \\ \frac{\sqrt{5}+1}{2} &= [1; 1, 1, 1, 1, \ldots] \\ \pi &= [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, \ldots] \end{aligned}$$

Die Kettenbruchentwicklungen von Quadratzahlen sind übrigens immer periodisch. Für $\sqrt{2}$ läßt sich dies folgendermaßen einsehen: Der Ansatz $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{x}$ führt auf $x = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$. Setzt man dies wieder in den Ansatz ein, ergibt sich $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{x}}$. Und daraus folgt sofort $\sqrt{2} = [1; \overline{2}]$.

Umgekehrt gehört jede periodische Kettenbruchentwicklung zu einer Zahl, die Lösung einer quadratischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten ist.

Aufgabe 7 *Die Eulersche Zahl e hat im Gegensatz zu π eine regelmäßige Kettenbruchentwicklung*

$$e = 2,718281828... = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, ...] \,.$$

Literatur

[1] John Farey, On a curious property of vulgar fractions. Letter to the *Philosophical Magazine*, 1816.

[2] Jean Züllig, *Geometrische Deutung unendlicher Kettenbrüche und ihre Approximation durch rationale Zahlen*, Orell Füssli Verlag, Zürich und Leipzig, 1928.

[3] John H. Conway, Richard K. Guy, *The book of numbers*, Springer-Verlag, New York, 1996.

[4] http://www.cut-the-knot.org/proofs/fords.shtml