MMM

8. Mai 2002

Näherungsweise Berechnung von Integralen

Claus Schneider

BEISPIEL: Integralgleichung:

$$x(s) - \int_0^1 e^{st}\, x(t)\, dt \;=\; e^s - [\, e^{s+1} - 1\,]/[\, s + 1\,]\;,\;\; 0 \le s \le 1.$$

Berechne $x(s)$ für $s \in [0,1]$!

Hier kann man das Integral gar nicht analytisch ausrechnen, da ja die Funktion x unbekannt ist. Ersetze daher das Integral durch eine Quadraturformel (und x durch die Näherung x_n).

1. Schritt: $\displaystyle\int_0^1 e^{st}\, x(t)\, dt \;\longrightarrow\; \underbrace{\sum_{i=0}^{n} \alpha_{in}\, e^{s\, t_{in}}\, x_n(\, t_{in}\,)}$ $\boxed{\text{Quadraturformel}}$.

(*) $$x_n(s) - \sum_{i=0}^{n} \alpha_{in}\, e^{s\, t_{in}}\, x_n\,(t_{in}) \;=\; e^s - [\, e^{s+1} - 1\,]/[\, s + 1\,]\;,$$

$0 \le s \le 1$.

Wenn man $x_n(t_{in})$ kennt, dann erhält man hieraus $x_n(s)$!

Berechne $x_n(t_{in})$ durch

2. Schritt: $s \in \{t_{0\,n},\; \dots,\; t_{nn}\} \Rightarrow$ $\boxed{\text{volle Diskretisierung:}}$

$$x_n(t_{jn}) - \sum_{i=0}^{n} \alpha_{in}\, e^{t_{jn}\, t_{in}}\, x_n(t_{in})$$

$$= e^{t_{jn}} - [\, e^{t_{jn}+1} - 1\,]/[\, t_{jn} + 1\,] \text{ , j=0(1)n.}$$

LINEARES GLEICHUNGSSYSTEM zur
Bestimmung von $x_n(t_{jn})$, j=0(1)n.

3. Schritt: Konstruiere aus den $x_n(t_{jn})$ eine Funktion
x_n(t) z.B. durch INTERPOLATION oder mit (*).

4. Schritt: Schätze den FEHLER x_n(t) - x(t) ab.

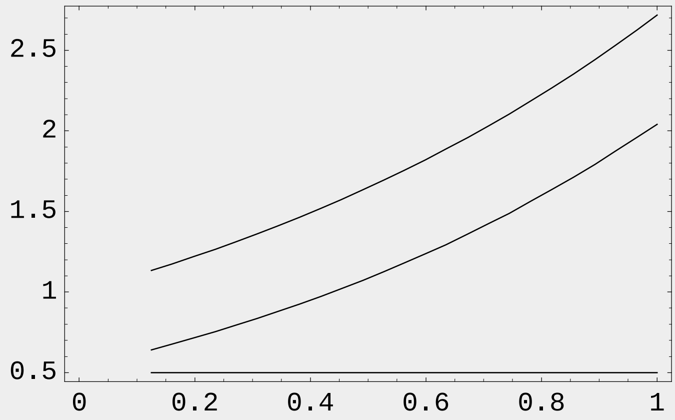
Lösung der Integralgleichung: $x(s) = e^s$.

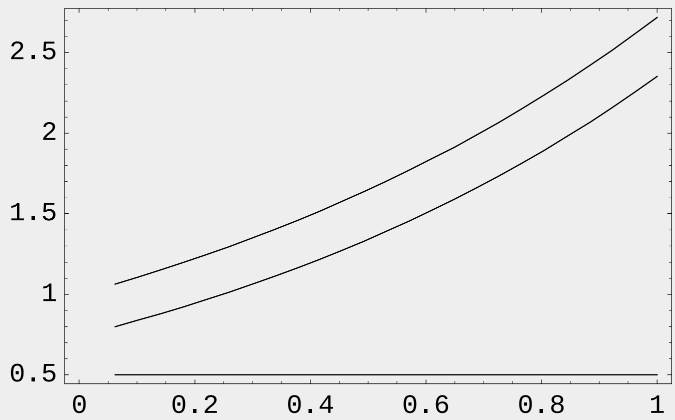
```
x[s_] = Exp[s]; y[s_] = Exp[s] - (Exp[s + 1] - 1) / (s + 1); k[s_, t_] = Exp[s t];
```

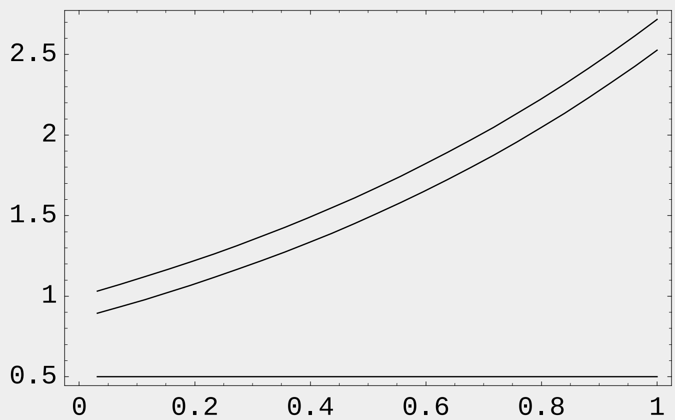
```
Simplify[x[s] - Integrate[k[s, t] x[t], {t, 0, 1}] - y[s]]
```

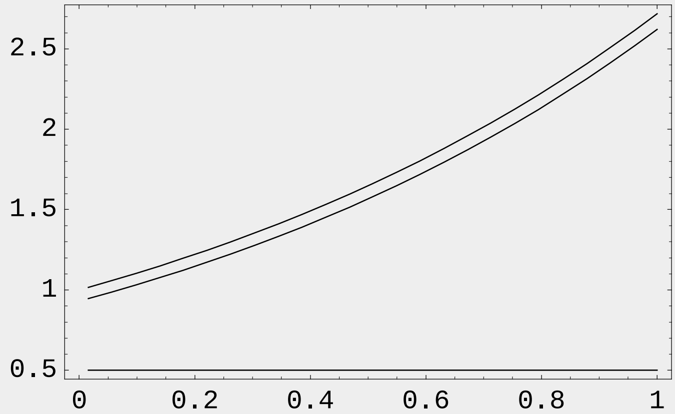
```
0
```

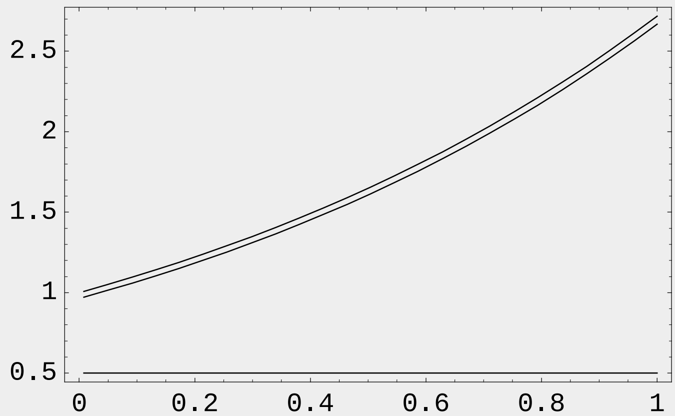
```
Do[
 n = 2^l;
 A = IdentityMatrix[n] - Table[N[k[i / n, j / n]] / n, {i, n}, {j, n}];
 b = Table[N[y[i / n]], {i, n}];
 xn = LinearSolve[A, b];

 TA = Table[{i / n, xn[[i]]}, {i, n}];
 z = Interpolation[TA, InterpolationOrder → 1];
 Plot[{0.5, z[t], x[t]}, {t, 1 / n, 1}, Frame → True], {l, 3, 7}]
```

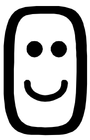

2.5
2
1.5
1
0.5
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1


2.5
2
1.5
1
0.5
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1


2.5
2
1.5
1
0.5
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1







Und jetzt die Integralgleichung

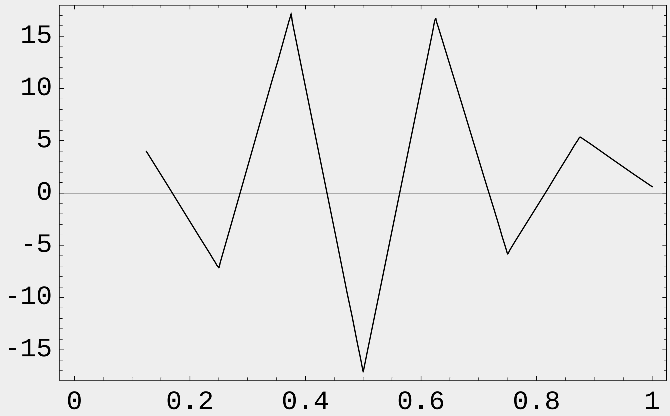
$$\int_0^1 e^{st}\, x(t)\, dt \;=\; [\, e^{s+1} - 1\,]/[\, s + 1\,] \;,\; 0 \leq s \leq 1,$$

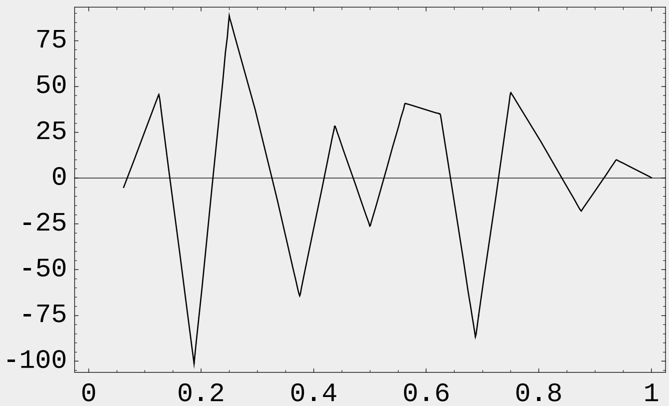
die die gleiche Lösung hat:

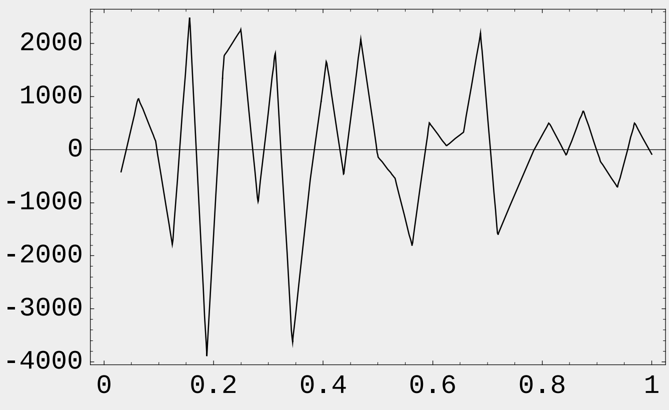
```
Simplify[Integrate[k[s, t] x[t], {t, 0, 1}] ]
```

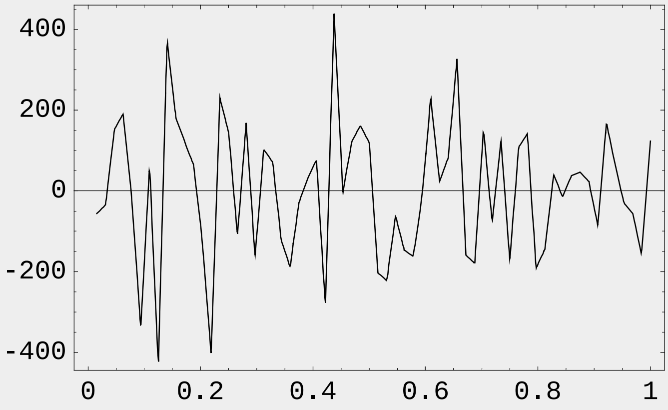
$$\frac{-1 + e^{1+s}}{1 + s}$$

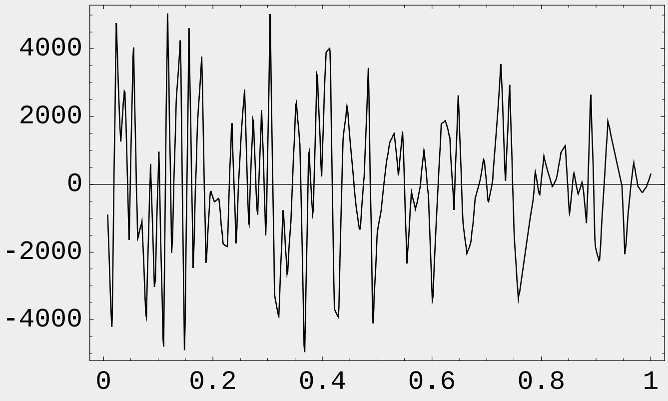
```
Do[
 n = 2^l;
 A = Table[N[k[i / n, j / n]] / n, {i, n}, {j, n}];
 b = Table[N[x[i / n] - y[i / n]], {i, n}];
 xn = LinearSolve[A, b];

 TA = Table[{i / n, xn[[i]]}, {i, n}];
 z = Interpolation[TA, InterpolationOrder → 1];
 Plot[{z[t]}, {t, 1 / n, 1}, Frame → True], {l, 3, 7}]
```









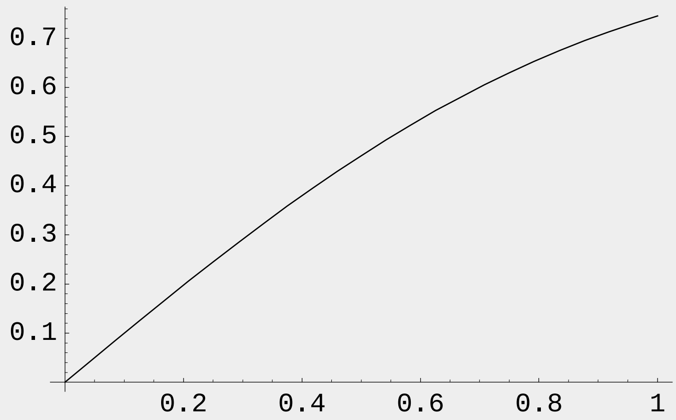


BEISPIEL:

```
g[t_] = Sin[Sin[t]]
```

```
Sin[Sin[t]]
```

```
Plot[g[t], {t, 0, 1}]
```




```
- Graphics -
```

```
Integrate[g[t], {t, 0, 1}]
```

$$\int_0^1 \mathrm{Sin}[\mathrm{Sin}[t]]\, dt$$

```
NIntegrate[g[t], {t, 0, 1}]
```

0.430606

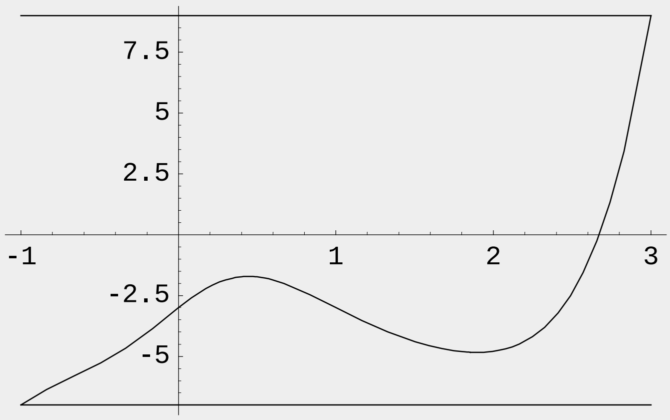
BEISPIEL:

$$f[t\_] = (t^3 - t)\, E^{t-3} - 2\,t^2 + 2\,t - 3 + \mathrm{Sin}[\pi\, t] / (t^2 + 1) \quad (*\ t \in \mathbb{R}\ *)$$

$$-3 + 2\,t - 2\,t^2 + e^{-3+t}\,(-t + t^3) + \frac{\mathrm{Sin}[\pi\, t]}{1 + t^2}$$

f (-1) = -7 , f (0) = -3 , f (1) = -3 , f (3) = 9

```
Plot[{-7, 9, f[t]}, {t, -1, 3}]
```



- Graphics -

```
int = Integrate[f[t], {t, -1, 3}]
```

$$\frac{1}{6\,e^3}\left(\frac{84}{e} - 28\,e^3 - 3\,e^3\,\text{CosIntegral}[(-1+i)\,\pi]\,\text{Sinh}[\pi] - 3\,e^3\,\text{CosIntegral}[(1+i)\,\pi]\,\text{Sinh}[\pi] - 3\,i\,e^3\,\text{Cosh}[\pi]\,\text{SinIntegral}[(-1+i)\,\pi] - 3\,i\,e^3\,\text{Cosh}[\pi]\,\text{SinIntegral}[(1+i)\,\pi]\right) - \frac{1}{6\,e^3}\left(48\,e^3 - 3\,e^3\,\text{CosIntegral}[(-3+i)\,\pi]\,\text{Sinh}[\pi] - 3\,e^3\,\text{CosIntegral}[(3+i)\,\pi]\,\text{Sinh}[\pi] - 3\,i\,e^3\,\text{Cosh}[\pi]\,\text{SinIntegral}[(-3+i)\,\pi] - 3\,i\,e^3\,\text{Cosh}[\pi]\,\text{SinIntegral}[(3+i)\,\pi]\right)$$

```
N[int]
```

$-12.522 + 1.06581 \times 10^{-14}\,i$

```
NIntegrate[f[t], {t, -1, 3}]
```

-12.522

Quadratur (Numerische Integration)

<u>Gegeben</u> : $\boldsymbol{f} \in$ C[a,b]

<u>Gesucht</u> : $\boldsymbol{If} := \int_a^b f(t)\, dt$ bzw. eine Approximation von $\boldsymbol{If}$.

Quadraturformel **zur Approximation von *If* :**

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_{in} f(t_{in}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

α_{in} **:** ***Gewichte*** **,** t_{in} **:** ***Knoten*** **(Stützstellen) der Quadraturformel.**

Probleme: (a) Wahl / Berechnung der Gewichte und Knoten.
(b) Abschätzung des Quadraturfehlers.

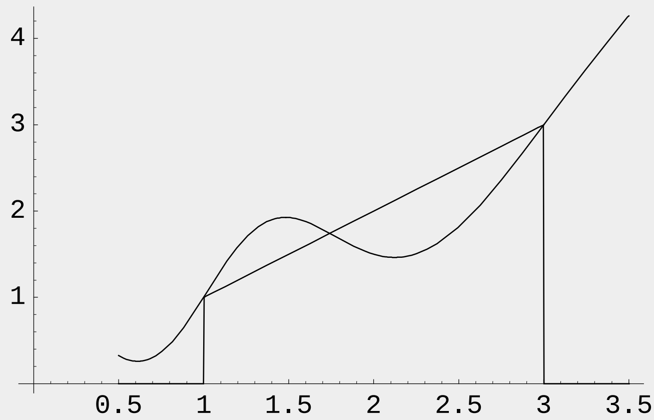
Ein einfaches Beispiel für eine Quadraturformel :

n=1, <u>Trapezregel</u> mit $\boxed{\text{Fehler}}$ ***, h*****:=b-a :**

$$\int_a^b f(t)\, dt = \frac{h}{2}\,[\, f(a) + f(b)\,] \quad \boxed{-\frac{h^3}{12} f''(\xi)}$$

falls $f \in C^2[a, b]$, wobei dann ξ in [a,b] liegt.

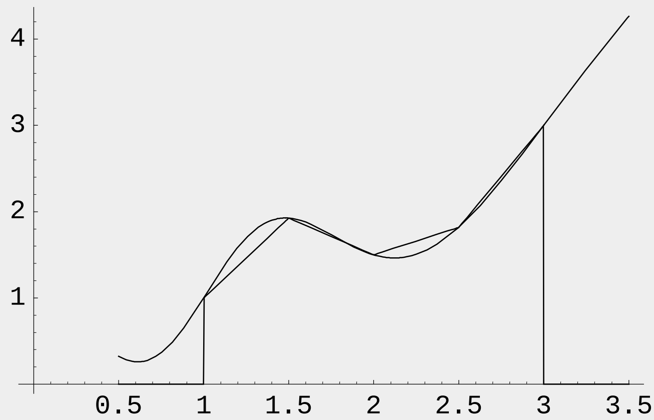
```
f[t_] = 1 + (t - 1)^2 / 2 + Sin[π (t - 1)] / ((t - 1)^2 + 1);
Plot[{f[t], If[t < 1 || t > 3, 0, Interpolation[
     {{1, f[1]}, {3, f[3]}}, InterpolationOrder -> 1][t]]}, {t, 0.5, 3.5}]
```




```
- Graphics -
```

■ **Erste Verbesserung:**

```
f[t_] = 1 + (t - 1)^2 / 2 + Sin[π (t - 1)] / ((t - 1)^2 + 1);
Plot[{f[t],
  If[t < 1 || t > 3, 0, Interpolation[Table[{1 + i / 2, f[1 + i / 2]}, {i, 0, 4}],
     InterpolationOrder -> 1][t]]}, {t, 0.5, 3.5}]
```




```
- Graphics -
```

Zusammengesetzte Trapezregel:

$$T_m f \;:=\; \frac{b-a}{m}\left\{\frac{f(a)}{2} + \sum_{i=1}^{m-1} f\left(a + i\,\frac{b-a}{m}\right) + \frac{f(b)}{2}\right\}$$

Fehler der zusammengesetzten Trapezregel:

$$If - T_m f = \sum_{i=0}^{m-1} -\left(\frac{b-a}{m}\right)^3 \frac{f''(\xi_i)}{12}$$

$$= -\frac{(b-a)^3}{12}\,\frac{1}{m^2}\left(\sum_{i=0}^{m-1}\frac{f''(\xi_i)}{m}\right)$$

$$= -\frac{1}{m^2}\,\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi)$$

(nach dem Zwischenwertsatz).

Bemerkung: Ist $f \in C^2[a,b]$, so konvergiert die Quadraturformel gegen *If*, und der Fehler geht gegen Null wie $\mathbf{1/m^2}$ mit $m \longrightarrow \infty$.

Programm und Beispiel:

```
T[m_, a_, b_, f_] =
 (b - a) / m ( Sum[f[a + (b - a) i / m], {i, m - 1}] + 0.5 (f[a] + f[b]))
```

$$\frac{(-a+b)\left(0.5\,(f[a]+f[b]) + \sum_{i=1}^{m-1} f\left[a + \frac{(b-a)\,i}{m}\right]\right)}{m}$$

```
f[t_] = Exp[-t]
```

e^{-t}

```
Table[(T[2^k, 0, 1, f] - (1 - Exp[-1])), {k, 7}]
(* m=2^k *)
```

```
{0.0131146, 0.00328887, 0.000822859,
 0.000205755, 0.0000514413, 0.0000128605, 3.21513×10^-6}
```

```
Table[(T[2^k, 0, 1, f] - (1 - Exp[-1])) (2^k)^2, {k, 6}]
```

```
{0.0524585, 0.0526219, 0.052663, 0.0526733, 0.0526759, 0.0526765}
```

■

Zweite Verbesserung durch Elimination von Fehlertermen:

Fehler der zusammengesetzten Trapezregel:

$$If - T_m f = \sum_{i=0}^{m-1} -\left(\frac{b-a}{m}\right)^3 \frac{f''(\xi_i)}{12}$$

$$= - \frac{(b-a)^3}{12} \frac{1}{m^2} \left(\sum_{i=0}^{m-1} \frac{f''\left(\frac{a+b}{2}\right) + \left(\xi_i - \frac{a+b}{2}\right) f'''(\eta_i)}{m} \right)$$

$$= - \frac{1}{m^2} \frac{(b-a)^3}{12} f''\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{(b-a)^3}{12} \frac{1}{m^2} \left(\sum_{i=0}^{m-1} \frac{\left(\xi_i - \frac{a+b}{2}\right) f'''(\eta_i)}{m} \right)$$

$$= C / m^2 + D(m) / m^2$$

Wenn $D(m)/m^2$ schneller gegen Null geht als C/m^2, dann ist es eine gute Idee, den ersten Fehlerterm zu eliminieren, um eine bessere Quadraturformel zu bekommen.

Wie ?

Betrachte T_{m_1} und T_{m_2} :

Dann ist $a\,T_{m_1}\ f + b\,T_{m_2}\ f =$

$$(a+b)\,I\ f\ + C(a/m_1^2 + b/m_2^2) + a\,D(m_1)/m_1^2 + b\,D(m_2)/m_2^2$$

$$\overset{!}{=}\ I\ f\ \ + 0\ +\ a\,D(m_1)/m_1^2 + b\,D(m_2)/m_2^2$$

hoffentlich besser, wenn

$a + b = 1$ und $a/m_1^2 + b/m_2^2 = 0$ gelten $\Longrightarrow$

$$a = m_1^2/(m_1^2 - m_2^2)\ \ ,\quad b = -m_2^2/(m_1^2 - m_2^2) \qquad (m_1 \neq m_2)$$

$m_1 = 2^k$, $m_2 = 2^{k+1}$, $k = 1, 2, .., 6$:
($a = -1/3$, $b = 4/3$)

```
Table[((-T[2^k, 0, 1, f] / 3 + 4 T[2 2^k, 0, 1, f] / 3) - (1 - Exp[-1])), {k, 6}]
```

$\{0.0000136165,\ 8.55776\times 10^{-7},\ 5.35606\times 10^{-8},$
$3.34871\times 10^{-9},\ 2.09313\times 10^{-10},\ 1.30822\times 10^{-11}\}$

Vorhin:

$\{0.0131146,\ 0.00328887,\ 0.000822859,$
$0.000205755,\ 0.0000514413,\ 0.0000128605,\ 3.21513\times 10^{-6}\}$

Wie verhält sich der Fehler, also

$a\,D(m_1)/m_1^2 + b\,D(m_2)/m_2^2\ =\ (D(m_1) - D(m_2))/(m_1^2 - m_2^2)$?

$\{0.0000136165,\ 8.55776\times 10^{-7},\ 5.35606\times 10^{-8},$
$3.34871\times 10^{-9},\ 2.09313\times 10^{-10},\ 1.30822\times 10^{-11}\}$

Wie $1/m^3$?

```
Table[
 ((-T[2^k, 0, 1, f] / 3 + 4 T[2 2^k, 0, 1, f] / 3) - (1 - Exp[-1])) (2^k)^3, {k, 6}]
```

$\{0.000108932,\ 0.0000547697,\ 0.000027423,$
$0.0000137163,\ 6.85878\times 10^{-6},\ 3.42942\times 10^{-6}\}$

Geht noch gegen Null, also besser. Wie $1/m^4$?

```
Table[((-T[2^k, 0, 1, f] / 3 + 4 T[2 2^k, 0, 1, f] / 3) - (1 - Exp[-1])) ( 2^ k)^4,
 {k, 6}]
```

```
{0.000217864, 0.000219079, 0.000219384,
 0.000219461, 0.000219481, 0.000219483}
```

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

$D(m) = D / m^2 \Longrightarrow (D(m_1) - D(m_2)) / (m_1^2 - m_2^2) = D / (m_1^2\, m_2^2)$

ist der erste Fehlerterm der neuen Quadraturformel

$a\, T_{m_1}\, f + b\, T_{m_2}\, f = (\, m_1^2\, T_{m_1}\, f - m_2^2\, T_{m_2}\, f) / (m_1^2 - m_2^2) = \, : T_{m_1, m_2}\, f$

Analog ist der erste Fehlerterm von $T_{m_2, m_3}\, f$ dann $D / (m_2^2\, m_3^2)$ und

er kann wie oben eliminiert werden durch

$(\, m_1^2\, T_{m_1, m_2}\, f - m_3^2\, T_{m_2, m_3}\, f) / (m_1^2 - m_3^2) = \, : T_{m_1, m_2, m_3}\, f$

$T_{m_1}\, f$

$T_{m_2}\, f \quad T_{m_1, m_2}\, f$

$T_{m_3}\, f \quad T_{m_1, m_2}\, f \quad T_{m_1, m_2, m_3}\, f$

....

$m_0 < m_1 < \ldots < m_k$

$T_{i0} := T_{m_i}\, f$, i=0(1)k

(Hauptaufwand !)

$T_{ij} \; := \; T_{i+1, j-1} + \dfrac{T_{i+1, j-1} - T_{i, j-1}}{(m_{i+j} / m_i)^2 - 1}$, i=0(1)k-j, j=1(1)k

(kaum Aufwand !)

Verbesserung durch Elimination der Fehlerterme:

```
f[t_] = Exp[-t];
b = 1; a = 0; Intf = N[Integrate[f[t], {t, a, b}]];
h = b - a; n = 1;
m = 4;
T = Table[0, {i, m + 1}];
T[[1]] = 0.5 h (f[a] + f[b]); Print[N[T[[1]] - Intf, 1]];
Do[ {s = 0; h = 0.5 h; n = 2 n; q = 1; U = Table[0, {j, k}];
          Do[ s = s + f[a + (2 i - 1) h], {i, n / 2}];
          T[[k]] = 0.5 T[[k - 1]] + s h; U[[1]] = T[[k]];
             Do[ {q = 4 q;
                   T[[k - i]] =
     T[[ k + 1 - i]] +  (T[[k + 1 - i]] - T[[k - i]]) /  (q - 1);
    U[[i + 1]] = T[[k - i]]} , {i, k - 1}]; Print[N[U - Intf, 5]]}
     , {k, 2, m + 1}]
```

0.0518192

{0.0131146, 0.000213121}

{0.00328887, 0.0000136165, 3.1618×10^{-7}}

{0.000822859, 8.55776×10^{-7}, 5.0618×10^{-9}, 1.23418×10^{-10}}

{0.000205755, 5.35606×10^{-8}, 7.95771×10^{-11}, 4.94271×10^{-13}, 1.22125×10^{-14}}

```
f[t_] = Sqrt[t];
b = 1; a = 0; Intf = N[Integrate[f[t], {t, a, b}]];
h = b - a; n = 1;
m = 4;
T = Table[0, {i, m + 1}];
T[[1]] = 0.5 h (f[a] + f[b]); Print[N[T[[1]] - Intf, 1]];
Do[ {s = 0; h = 0.5 h; n = 2 n; q = 1; U = Table[0, {j, k}];
          Do[ s = s + f[a + (2 i - 1) h], {i, n / 2}];
          T[[k]] = 0.5 T[[k - 1]] + s h; U[[1]] = T[[k]];
             Do[ {q = 4 q;
                   T[[k - i]] =
     T[[ k + 1 - i]] + (T[[k + 1 - i]] - T[[k - i]]) / (q - 1);
    U[[i + 1]] = T[[k - i]]} , {i, k - 1}]; Print[N[U - Intf, 5]]}
     , {k, 2, m + 1}]
```

```
-0.166667

{-0.0631133, -0.0285955}

{-0.0233836, -0.0101404, -0.00891006}

{-0.00853645, -0.00358739, -0.00315052, -0.0030591}

{-0.00308547, -0.00126848, -0.00111388, -0.00108156, -0.0010738}
```

☹

```
Table[(T[2^k, 0, 1, Sqrt] - (2 / 3)), {k, 7}]
```

```
{-0.0631133, -0.0233836, -0.00853645,
 -0.00308547, -0.00110773, -0.000395855, -0.000141009}
```

```
Table[%[[i]] / %[[i + 1]], {i, 6}]
```

```
{2.69904, 2.73927, 2.76666, 2.7854, 2.79832, 2.8073}
```

```
Log[%] / Log[2]
```

```
{1.43245, 1.45379, 1.46815, 1.47788, 1.48456, 1.48918}
```

```
f[t_] = Cos[2 π t];
b = 1; a = 0; Intf = N[Integrate[f[t], {t, a, b}]];
h = b - a; n = 1;
m = 4;
T = Table[0, {i, m + 1}];
T[[1]] = 0.5 h (f[a] + f[b]); Print[N[T[[1]] - Intf, 1]];
Do[ {s = 0; h = 0.5 h; n = 2 n; q = 1; U = Table[0, {j, k}];
          Do[ s = s + f[a + (2 i - 1) h], {i, n / 2}];
          T[[k]] = 0.5 T[[k - 1]] + s h; U[[1]] = T[[k]];
             Do[ {q = 4 q;
                    T[[k - i]] =
     T[[ k + 1 - i]] +  (T[[k + 1 - i]] - T[[k - i]]) /  (q - 1);
    U[[i + 1]] = T[[k - i]]} , {i, k - 1}]; Print[N[U - Intf, 5]]}
      , {k, 2, m + 1}]
```

1.

{0., −0.333333}

$\{-3.06152\times10^{-17}, -4.08202\times10^{-17}, 0.0222222\}$

$\{-4.30632\times10^{-17}, -4.72125\times10^{-17}, -4.76386\times10^{-17}, -0.000352734\}$

$\{-4.92872\times10^{-17}, -5.13618\times10^{-17},$
$-5.16384\times10^{-17}, -5.17019\times10^{-17}, 1.38327\times10^{-6}\}$

?

Satz **(Euler - MacLaurin - Summenformel)**

Voraussetzung: $f \in C^{2k+2}$ [a,b] , $k \in \mathbb{N}$.

Behauptung: h:=(b-a)/m

$$T_m f = \int_a^b f(t)\, dt + \sum_{i=1}^{k} \frac{\overline{B}_{2i}}{(2i)!} \boxed{h^{2i}} \{ f^{(2i-1)}(b) - f^{(2i-1)}(a) \}$$

$$- \frac{1}{(2k+2)!} h^{2k+2} \int_a^b \left\{ \hat{B}_{2k+2}\left(\frac{t-a}{h}\right) - \overline{B}_{2k+2} \right\} f^{(2k+2)}(t)\, dt$$

Dabei sind $\overline{B_k}$ ($k \in \mathbb{N}_0$) die *Bernoulli-Zahlen*

$\overline{B_0} := 1$; $\qquad \sum_{i=0}^{k} \binom{k+1}{i} \overline{B_i} = 0,\ k > 0.$

```
Table[BernoulliB[k], {k, 1, 25}]
```

$$\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, 0, -\frac{1}{30}, 0, \frac{1}{42}, 0, -\frac{1}{30}, 0, \frac{5}{66}, 0, -\frac{691}{2730}, 0, \frac{7}{6}, 0, -\frac{3617}{510}, 0, \frac{43867}{798}, 0, -\frac{174611}{330}, 0, \frac{854513}{138}, 0, -\frac{236364091}{2730}, 0\right\}$$

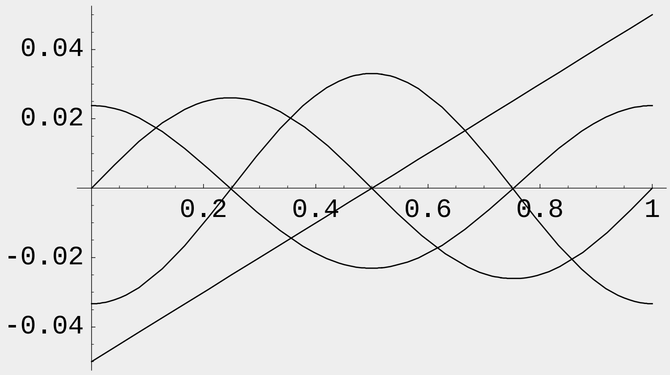
$B_k \in \prod_k$ ($k \in \mathbb{N}_0$) sind die *Bernoulli - Polynome* über [0,1] :

$B_0(t) = 1$; $\qquad B_k(t) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \overline{B_i}\, t^{k-i},\ k \geq 1.$

$\hat{B}_k$ ist die 1-periodische Fortsetzung von B_k auf ganz $\mathbb{R}$

($\hat{B}_{k|[0,1]} = B_k$)

```
Plot[{BernoulliB[1, t] / 10, BernoulliB[6, t],
  BernoulliB[7, t], BernoulliB[8, t]}, {t, 0, 1}]
```




```
- Graphics -
```

Zeige:

0) $B_1(t) = t-1/2$

1) $B_k(0) = B_k(1) = \overline{B_k}$, k>1

2) $B_k'(t) = k\, B_{k-1}(t)$, $k \geq 1$

3) $\int_0^1 B_k(t)\, dt = 0$, $k \geq 1$

Beweis:

Zeige:

$$\sum_{j=1}^{n} f(j) = \int_0^n f(t)\, dt + \sum_{i=1}^{k} (-1)^i \frac{\overline{B}_i}{i!} \{ f^{(i-1)}(n) - f^{(i-1)}(0) \}$$

$$+ \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \int_0^n \hat{B}_k(t)\, f^{(k)}(t)\, dt$$

zunächst für n=1.......

Formel zur Berechnung von $\boxed{\sum_{j=1}^{n} j^d}$, n, d ∈ ℕ, d<k.

Beweis:

Bemerkungen: (i) Ist f ∈ C^{2k+2} [a,b] und sind $f, f', \ldots, f^{(2k+1)}$
(b-a)-periodisch, so gilt also

$$T_m\, f = \int_a^b f(t)\, dt + h^{2k+2}\, \sigma_{k+1}(h)\, .$$

(ii) Ist $f \in C^\infty$ [a,b] und sind f sowie alle Ableitungen (b-a)-periodisch, so konvergiert $T_m\, f$ (gegen das Integral über f) schneller als jede Potenz von h für h ⟶ 0. 'Kompliziertere' Quadraturformeln sind in diesem Falle nutzlos!

(iii) Bei genügend glattem f gilt die Entwicklung für jedes **endliche** k, aber i.a. konvergiert $h^{2k+2}\, \sigma_{k+1}(h)$ keineswegs gegen Null für **k** ⟶ ∞. (Asymptotische Entwicklung !) Z.B. f(t)=cos(m t), a=0, b=2π. Dann ist $T_m\, f = 2\pi$, aber die Summe ist Null für alle k.

Die Formel zeigt, dass $T_m\, f$ als Funktion von h=(b-a)/m sich bis auf einen Restterm(h) wie ein Polynom in h^2 verhält. Daher ist es sinnvoll, $T_m\, f$ durch ein Interpolationspolynom in $\boldsymbol{h^2}$ zu ersetzen und dessen Wert **an der Stelle Null** als Approximation für $\boldsymbol{T_\infty}\, f = I\, f$ zu nehmen (um ein solches Polynom p_k vom Höchstgrad k zu berechnen, benötigt man k+1 Werte $T_{m_i}\, f$, i=0,1,...,k. Dann ist $p_k(1/m_i) = T_{m_i}\, f$ und $p_k(0) = T_{0\,k}$).

$\Longrightarrow$

andere Interpretation der Elimination von Fehlertermen, nämlich

■ Extrapolation auf die Schrittweite Null

(Richardson-Extrapolation 1928)

Satz (Fehler der Extrapolation)

Voraussetzungen: $f \in C^{2k+2}[a,b]$, $k \in \mathbb{N}$,

$$h_0 > h_1 > \ldots > h_k > 0,\ 0 \le i \le k-j,\ 1 \le j \le k.$$

Behauptung:

$$\left| \int_a^b f(t)\, dt - T_{ij} \right| \le h_i^2\, h_{i+1}^2 \cdots h_{i+j}^2\, (b-a)\, \frac{|\bar{B}_{2j+2}|}{(2j+2)!} \| f^{(2j+2)} \|_\infty C_{ij},$$

wobei
$$C_{ij} := \sum_{\mu=0}^{j} \prod_{\substack{\nu=0 \\ \nu \ne \mu}}^{j} \frac{1}{\left| 1 - h_{\nu+i}^2 / h_{\mu+i}^2 \right|}.$$