Prof. Dr. K. Doerk
Jens Mandavid
Christian Sevenheck

26.7.2002

Klausur zur Linearen Algebra II

Bitte tragt Euren Vor- und Nachnamen sowie die Matrikelnummer **gut leserlich** in Druckschrift in die nachfolgende Tabelle ein. Die Bearbeitungszeit für die Klausur beträgt 3 Stunden. Eigene Aufzeichnungen und Bücher dürfen verwendet werden, aber keine Taschenrechner. Insgesamt sind 50 Punkte zu erreichen. Bitte bearbeitet alle Aufgaben auf gesonderten Blättern und schreibt auf jedes Blatt Euren Namen und Eure Matrikelnummer.

Vorname	Name	Matrikelnummer

In die nächste Tabelle bitte **nichts** eintragen !!!

	Punkte
1. Aufgabe	
2. Aufgabe	
3. Aufgabe	
4. Aufgabe	
5. Aufgabe	
6. Aufgabe	
Summe	

1. *(2+2+2+1+2 Punkte)* Entscheide bei den folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch sind und gib eine Begründung an.

   (a) Es gibt ein $k \in \mathbb{Z}$ so dass für alle $n \in \mathbb{Z}$ die Menge $\{k + n \cdot m \,|\, m \in \mathbb{Z}\}$ ein Ideal in $\mathbb{Z}$ ist.

   (b) Für alle $k, n \in \mathbb{Z}$ ist die Menge $\{k + n \cdot m \,|\, m \in \mathbb{Z}\}$ ein Ideal in $\mathbb{Z}$.

   (c) Sei $A \in \mathrm{End}_K(V)$ ein diagonalisierbarer Endomorphismus und $f_A = \prod_{i=1}^n (t - a_i)$ das charakteristische Polynom. Dann gilt $a_i \neq a_j$ für alle $i \neq j$.

   (d) Sei $A \in \mathrm{End}_K(V)$ ein Endomorphismus und $m_A = \prod_{i=1}^r (t - a_i)$ das Minimalpolynom. Weiterhin sei $a_i \neq a_j$ für alle $i \neq j$. Dann ist A diagonalisierbar.

   (e) Sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Orthogonalbasis eines Hilbertraumes V über $\mathbb{K}$ und $A \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$. Dann gilt für alle $w \in V$

$$A^t w = \sum_{i=1}^{n} (w, Av_i) v_i$$

2. *(5 Punkte)* Sei K ein Körper und V ein vier-dimensionaler K-Vektorraum. Sei $A \in \mathrm{End}_K(V)$ mit $\mathrm{Rang}(A) = 2$. Wir nehmen an, dass A zwei verschiedene Eigenwerte a_1, a_2 mit $a_1 \cdot a_2 \neq 0$ besitzt. Ist A diagonalisierbar?

3. *(5+4 Punkte)* Sei $\mathbb{K}$ einer der Körper $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

   (a) Sei $\alpha : \mathbb{K}^1 \to \mathbb{R}$ ein Abbildung. Zeige, dass α genau dann eine Norm auf $\mathbb{K}^1$ definiert, wenn es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\lambda > 0$ gibt, so dass für alle $k \in \mathbb{K}^1$ gilt $\alpha(k) = \lambda \cdot |k|$.

   (b) Sei $\alpha : \mathbb{K}^1 \to \mathbb{R}$ eine Norm auf $\mathbb{K}^1$. Bestimme die von α auf $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^1)$ induzierte Algebrennorm.

4. *(5 Punkte)* Bestimme eine Basis des $\mathbb{R}^3$, bezüglich derer die Matrix

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

   Jordansche Normalform hat.

5. *(9 Punkte)* Betrachte den Vektorraum V der differenzierbaren Funktionen von $[0, 2\pi]$ nach $\mathbb{R}$. Sei $U \subset V$ der von den Funtionen $1, \cos(t), \sin(t)$ und t erzeugte Untervektorraum. Betrachte die lineare Abbildung $D : U \to U$, welche jeder Funktion ihre Ableitung zuordnet. Auf V (und damit auch auf U) haben wir das definite Skalarprodukt

$$(f, g) := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) g(t) \, dt$$

   Ist D eine normale Abbildung?

6. *(13 Punkte)* Sei K ein Körper, V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und $A \in \mathrm{End}_K(V)$. Sei

$$\begin{aligned} B : \mathrm{End}_K(V) &\longrightarrow \mathrm{End}_K(V) \\ X &\longmapsto X \circ A \end{aligned}$$

   Beweise, dass $f_B = (f_A)^n$.

Viel Erfolg !!!