Prof. Dr. K. Doerk
Jens Mandavid
Christian Sevenheck

17.9.2003

Nachklausur zur Linearen Algebra II

Bitte tragt Euren Vor- und Nachnamen sowie die Matrikelnummer **gut leserlich** in Druckschrift in die nachfolgende Tabelle ein. Die Bearbeitungszeit für die Klausur beträgt 3 Stunden. Eigene Aufzeichnungen und Bücher dürfen verwendet werden, aber keine Taschenrechner. Insgesamt sind 50 Punkte zu erreichen. Bitte bearbeitet alle Aufgaben auf gesonderten Blättern und schreibt auf jedes Blatt Euren Namen und Eure Matrikelnummer.

Vorname	Name	Matrikelnummer

In die nächste Tabelle bitte **nichts** eintragen !!!

	Punkte
1. Aufgabe	
2. Aufgabe	
3. Aufgabe	
4. Aufgabe	
5. Aufgabe	
6. Aufgabe	
Summe	

1. *(1+4+3+2 Punkte)* Es sei V der $\mathbb{C}$-Vektorraum der komplexen Polynome vom Grad ≤ 2. Wir betrachten die Abbildung

$$A\colon f(t) \mapsto f(t) + itf'(t).$$

   (a) Zeige, dass A ein Endomorphismus von V ist.

   (b) Berechne das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom von A sowie alle Eigenwerte mit den zugehörigen Eigenräumen.

   (c) Wir versehen V nun mit dem (definiten) Skalarprodukt

$$\left(a_1 + b_1 t + c_1 t^2, a_2 + b_2 t + c_2 t^2\right) := a_1\overline{a_2} + b_1\overline{b_2} + c_1\overline{c_2}.$$

   Ist hier A normal, hermitesch bzw. unitär?

   (d) Jetzt versehen wir V mit dem (definiten) Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle := \int_{-1}^{1} f(t)\overline{g(t)}\, dt.$$

   Ist hier A normal, hermitesch bzw. unitär?

2. *(9 Punkte)* Bestimme eine orthogonale Matrix $O \in (\mathbb{R})_3$ derart, dass

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = O' \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} O.$$

3. *(3+5 Punkte)* Es seien K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $A \in \mathrm{End}_K(V)$. Es sei $\lambda \in K$ ein Eigenwert zu A und $(0 \neq) w \in V$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ. Wir nehmen außerdem an, dass es ein $v \in V$ mit $A(v) = \lambda v + w$ gibt.

   (a) Zeige, dass der von v und w erzeugte Unterraum die Dimension 2 hat und A-invariant ist.

   (b) Zeige, dass A nicht diagonalisierbar ist.

4. *(6 Punkte)* Sei K ein Körper und $g \in K[t]$ ein Polynom. Ferner sei V ein K-Vektorraum und $A \in \mathrm{End}_K(V)$ mit einem Eigenwert $\lambda \in K$. Zeige, dass dann $g(\lambda)$ ein Eigenwert von $g(A)$ ist.

5. *(8 Punkte)* Sei V ein K-Vektorraum der Dimension 5, $A \in \mathrm{End}_K(V)$ und $f_A = t(t+1)^4$. Außerdem sei der Rang von $A + E$ gleich 2. Bestimme das Minimalpolynom von A.

6. *(1+3+5 Punkte)* Es sei V ein euklidischer Vektorraum der Dimension n und $A \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ mit $A^t + A = 0$. Es bezeichne $E \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ die identische Abbildung. Zeige:

   (a) A ist normal.

   (b) $E - A$ ist ein invertierbarer Endomorphismus von V.

   (c) $(E - A)^{-1}(E + A) \in SO(n)$.

Viel Erfolg !!!