Prof. Dr. Klaus Doerk
Jens Mandavid
Christian Sevenheck

Blatt 9
08.07.2003

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra II

1. *(2 Punkte)* Auf dem K-Vektorraum $V := K[x]$ aller Polynome über K ($K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$) definieren wir ein definites Skalarprodukt (,) und ein $A \in \mathrm{Hom}_K(V, K)$ durch

$$\left(\sum_{j=0}^{n} a_j x^j, \sum_{j=0}^{n} b_j x^j\right) := \sum_{j=0}^{n} a_j \overline{b_j}, \qquad A\left(\sum_{j=0}^{n} a_j x^j\right) := \sum_{j=0}^{n} a_j.$$

Zeige: Es gibt **kein** $B\colon K \to V$ mit

$$(Av)\overline{w} = (Av, w)_K = (v, Bw) \qquad \text{für alle } v \in V,\ w \in K.$$

2. *(2 Punkte)* Es sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum ($K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$) mit definitem Skalarprodukt (,), B eine *beliebige* Basis von V und $A \in \mathrm{Hom}_K(V, V)$. Beweise: Ist G die Gramsche Matrix von V zu B, so gilt

$${}_B(A^t)_B = \bar{G}^{-1} \cdot \overline{{}_BA_B}\,' \cdot \bar{G}.$$

Hinweis: Beweise zunächst $G \cdot \overline{{}_B(A^t)_B} = {}_BA_B\,' \cdot G$.

3. *(2 Punkte)* Es sei V ein endlich-dimensionaler (reeller oder komplexer) Hilbertraum und A ein normaler Endomorphismus von V. Beweise:

   (a) $\mathrm{Kern}\, A = \mathrm{Kern}\, A^t$, $\mathrm{Bild}\, A = \mathrm{Bild}\, A^t$ und $V = \mathrm{Kern}\, A \perp \mathrm{Bild}\, A$.

   (b) Sind f und g teilerfremde Polynome aus $K[x]$, so ist $\mathrm{Kern}\, f(A) \perp \mathrm{Kern}\, g(A)$.

4. *(2 Punkte)* Sei W ein komplexer Hilbertraum endlicher Dimension und $A \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W)$. Wir nehmen an, dass A normal ist. Zeige: Falls es ein n gibt, so dass $A^n = E$ ist, dann muss A schon unitär sein.

5. *(2 Punkte)* Ermittle eine unitäre Matrix T, die die folgende Matrix diagonalisiert:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3.$$

Abgabe bis Mittwoch, den 16. Juli 2003 um 8^{15} Uhr.