Prof. Dr. Klaus Doerk
Jens Mandavid
Christian Sevenheck

Blatt 8
01.07.2003

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra II

1. *(2 Punkte)* Wir betrachten im $\mathbb{R}$-Vektorraum F aller reellen Folgen $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ die Teilmenge ℓ^2 der quadratsummierbaren Folgen, also

$$\ell^2 := \left\{ (a_k)_{k\in\mathbb{N}} \;\middle|\; \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < \infty \right\}.$$

Zeige:

(a) ℓ^2 ist ein Unterraum von F.

(b) Sind $a = (a_k)$, $b = (b_k) \in \ell^2$, so ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ absolut konvergent.
Tipp: Die Schwarzsche Ungleichung für das gewöhnliche Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ kann hier nützlich sein.

(c) Durch $(a, b) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ wird auf ℓ^2 ein definites Skalarprodukt definiert.

(d) Für den Unterraum $U = \{(a_k) \mid a_k = 0$ für fast alle $k\}$ aller abbrechenden Folgen gilt $U^\perp = \{0\}$. Insbesondere ist $U \perp U^\perp \neq \ell^2$.

2. *(2 Punkte)* Wir definieren eine Abbildung $(\ ,\ ) : \mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}$ durch die Festsetzung

$$(A, B) := \operatorname{Spur}(A' \cdot B) \qquad \text{für alle } A, B \in \mathbb{R}_n,$$

wobei A' die Transponierte von A bezeichne.

(a) Zeige, dass $(\ ,\ )$ ein definites Skalarprodukt auf $\mathbb{R}_n$ ist.

(b) Es sei

$$U := \{A \in \mathbb{R}_n \mid A' = A\}, \quad W := \{A \in \mathbb{R}_n \mid A' = -A\}.$$

Beweise: $\mathbb{R}_n = U \perp W$.

(c) Es sei $n = 2$ und D der Unterraum der Diagonalmatrizen von $\mathbb{R}_2$. Bestimme Orthonormalbasen von D und $D^\perp$ bezüglich dieses Skalarprodukts.

3. *(2 Punkte)* Es sei V ein K-Vektorraum ($K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$) mit zwei definiten Skalarprodukten $(\ ,\ )_1$ und $(\ ,\ )_2$ und den zugehörigen Normen $\|\ \|_1$ und $\|\ \|_2$, also $\|v\|_j := \sqrt{(v, v)_j}$ für alle $v \in V$ und $j = 1, 2$. Beweise für beide Fälle $K = \mathbb{R}$ bzw. $K = \mathbb{C}$, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) $(v, w)_1 = (v, w)_2$ für alle $v, w \in V$.

(ii) $\|v\|_1 = \|v\|_2$ für alle $v \in V$.

4. *(3 Punkte)*

(a) Es sei $U := \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ der Unterraum von $\mathbb{C}^4$, der von den Vektoren

$$u_1 := (1, 0, i, 0),\ u_2 := (-1, 1, 0, -i),\ u_3 := (1, -1, 2, i) \qquad \text{mit } i^2 = -1$$

erzeugt wird. Konstruiere bezüglich des kanonischen Skalarprodukts von $\mathbb{C}^4$ eine Orthonormalbasis von U und bestimme das orthogonale Komplement $U^\perp$ zu U in $\mathbb{C}^4$.

(b) Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[0, 1]$. Zeige, dass durch

$$(f, g) := \int_0^1 f(t) \cdot g(t) dt$$

ein Skalarprodukt auf V definiert wird und finde eine Orthonormalbasis des von den Funktionen 1, t und t^2 erzeugten Untervektorraums von V.

Abgabe bis Mittwoch, den 9. Juli 2003 um 8^{15} Uhr.