Prof. Dr. Klaus Doerk
Jens Mandavid
Christian Sevenheck

Blatt 7
24.06.2003

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra II

1. *(2 Punkte)* Zeige, dass folgende vier Normen $\| \; \|$ auf $\mathbb{R}^3$ wirklich Normen sind (nur die Dreiecksungleichung nachprüfen) und skizziere jeweils die „Einheitsshpären“ $S^2_{\| \|} := \{ v \in \mathbb{R}^3 \mid \|v\| = 1 \}$.

   (a) $\|(x, y, z)\| = \max\left\{|x|, \sqrt{y^2 + z^2}\right\}$,

   (b) $\|(x, y, z)\| = |x| + \sqrt{y^2 + z^2}$,

   (c) $\|(x, y, z)\| = \max\{|x|, |y| + |z|\}$,

   (d) $\|(x, y, z)\| = |x| + \max\{|y|, |z|\}$.

2. *(2 Punkte)* Von den folgenden beiden Aussagen a) und b) ist genau eine richtig. Beweise die richtige und widerlege die falsche durch ein Gegenbeispiel.
   Seien $\| \; \|_1$ und $\| \; \|_2$ Normen auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V.

   (a) Dann ist durch $\| \; \|^{\sim} := \max\{\|v\|_1, \|v\|_2\}$ stets eine Norm auf V gegeben.

   (b) Dann ist durch $\| \; \|^{\approx} := \min\{\|v\|_1, \|v\|_2\}$ stets eine Norm auf V gegeben.

3. *(2 Punkte)* Es sei V ein K-Vektorraum (mit $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$) und $\alpha \colon V \to \mathbb{R}$ eine Abbildung mit

$$\alpha(av) = |a| \cdot \alpha v \qquad \text{für alle } v \in V \text{ und alle } a \in K, \tag{1}$$
$$\alpha(v_1 + v_2) \leq \alpha v_1 + \alpha v_2 \qquad \text{für alle } v_1, v_2 \in V. \tag{2}$$

   Man zeige: a) $\alpha v \geq 0$ für alle $v \in V$.
   b) $U := \{v \in V \mid \alpha v = 0\}$ ist ein Unterraum von V.
   c) Setzt man $\|v + U\| := \alpha v$ für alle $v \in V$, so ist $\| \; \|$ eine Norm auf V/U.

4. *(2 Punkte)* Es sei V ein normierter K-Vektorraum ($K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) und U ein abgeschlossener Unterraum von V. Zeigen Sie, dass der Faktorraum V/U durch die Festsetzung

$$\|v + U\| := \inf\{\|x\| \mid x \in v + U\} \quad \text{für alle } v \in V$$

   ein normierter Raum wird.

5. *(2 Punkte)*

   (a) Es seien V und W Vektorräume über demselben Körper $K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Ferner sei A ein **Mono**morphismus von V in W und $\| \; \|$ eine Norm auf W. Zeige, dass durch die Festsetzung $\|v\|' := \|Av\|$ für alle $v \in V$ eine Norm $\| \; \|'$ auf V definiert wird.

   (b) Es sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ **endlicher** Dimension, $\| \; \|$ eine Norm auf V und $A \in \mathrm{GL}(V)$. Wie in Teil a) bilde man die Norm $\| \; \|'$ auf V durch die Festsetzung $\|v\|' := \|Av\|$ für alle $v \in V$. Bestimme das kleinste $b \in \mathbb{R}$ und das größte $a \in \mathbb{R}$ mit

$$a\|v\| \leq \|v\|' \leq b\|v\| \qquad \text{für alle } v \in V.$$

Abgabe bis Mittwoch, den 2. Juli 2003 um 8^{15} Uhr.