Prof. Dr. Klaus Doerk
Jens Mandavid
Christian Sevenheck

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra II

1. *(1 points)* Let A be an $n \times n$-matrix over a field k. Consider the homomorphism of k-algebras

$$\begin{aligned} \Phi : k[t] &\longrightarrow (k)_n \\ P(t) &\longmapsto P(A) \end{aligned}$$

   Show that the image of Φ is a commutative subring of $(k)_n$.

2. *(2 points)* Let V be a finite dimensional vector space over k and $A \in \mathrm{Hom}_k(V,V)$ a k-linear map. Moreover, let $m \in \mathbb{N}_0$ be the smallest integer such that $\ker A^m = \ker A^{m+1}$. Show that:

   (a) $V = \mathrm{Im}\, A^0 \supsetneqq \mathrm{Im}\, A^1 \supsetneqq \mathrm{Im}\, A^2 \supsetneqq \cdots \supsetneqq \mathrm{Im}\, A^m = \mathrm{Im}\, A^{m+1}$ and $\mathrm{Im}\, A^m = \mathrm{Im}\, A^k$ for all $k \geq m$.

   (b) $V = \mathrm{Im}\, A^m \oplus \mathrm{Kern}\, A^m$.

   (c) The restriction $A_{|\,\mathrm{Im}\, A^m}$ is regular, and the restriction $A_{|\,\ker A^m}$ is nilpotent.

3. *(2 Punkte)* Bestimme das Minimalpolynom von

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3$$

   und entscheide, ob A trigonalisierbar oder sogar diagonalisierbar ist. Ermittle gegebenenfalls eine Transformationsmatrix T so, dass $T^{-1}AT$ Dreiecks- bzw. Diagonalgestalt hat.

4. *(2 points)*

   (a) Let V be a vector space over k of dimension $n \in \mathbb{N}$ and $A \in \mathrm{GL}_k(V)$. Show that there is a polynomial $g \in k[x]$ with degree less than n such that $A^{-1} = g(A)$.

   (b) Compute using a) the inverse of the following matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3$$

5. *(3 Punkte)* Es sei V ein vom Nullraum verschiedener endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $A \in \mathrm{Hom}_K(V,V)$. Beweise, dass f_A genau dann irreduzibel ist, wenn V nur die trivialen A-invarianten Unterräume besitzt. Gehe folgendermaßen vor:

   - Zeige zunächst, dass f_A reduzibel ist, falls es einen A-invarianten Unterraum $U \subset V$ mit $\dim(U) > 0$ gibt.
   - Nun nehmen wir an, es gäbe nur triviale A-invariante Unterräume. Zeige, dass dann wenigstens das Minimalpolynom irreduzibel sein muss.
   - Beweise schließlich, dass aus $\deg(m_A) < \deg(f_A)$ folgt, dass ein Unterraum $U \subsetneq V$ mit $A(U) \subset U$ existiert.

Bitte wenden !!!

Abgabe bis Mittwoch, den 14. Mai 2003 um 8^{15} Uhr.

Hinweis

Wegen verschiedener Terminprobleme wird die Klausur am Samstag. den 26.7.2003 am Nachmittag stattfinden. Den genauen Termin geben wir noch bekannt. Wer an diesem Tag wegen anderer Klausuren/Prüfungen/Pflichtseminaren..... nicht teilnehmen kann, möge sich bitte bei uns melden.