Prof. Dr. Klaus Doerk
Jens Mandavid
Christian Sevenheck

Blatt 2
13.05.2003

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra II

1. *(1 Punkt)* Seien R und S Ringe und $\varphi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus.
   - Sei $I \subset R$ ein Ideal. Ist dann $\varphi(I) \subset S$ ein Ideal?
   - Sei $J \subset S$ ein Ideal. Ist dann $\varphi^{-1}(J) \subset R$ ein Ideal?

   Unter welcher Bedingung an die Abbildung φ ist die Antwort auf diese beiden Fragen "ja"?

2. *(2 Punkte)*
   (a) Es seien A, B Ideale in $K[x]$. Dass $A \cap B$ und $A + B := \{a + b \mid a \in A,\, b \in B\}$ wieder Ideale in $K[x]$ sind, ist leicht zu sehen. Zeige, dass auch
   $$AB := \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \;\middle|\; a_i \in A,\, b_i \in B,\, n \in \mathbb{N} \right\}$$
   wieder ein Ideal in $K[x]$ ist und dass gilt:
   $$AB \subseteq A \cap B \subseteq A \cup B \subseteq A + B.$$
   (b) Beweise, dass für beliebige Ideale A, B, C aus $K[x]$ folgende Regeln gelten:
   (1) $A(B + C) = AB + AC$,
   (2) $A(B \cap C) = AB \cap AC$,
   (3) $(A + B)(A \cap B) = AB$.
   Hinweis: Benutze beim Nachweis von $AB \cap AC \subseteq A(B \cap C)$, dass $K[x]$ ein Hauptidealring ist. Beim Beweis von (3) verwende man (1) und (2).

3. *(2 points)* Let $f, g \in K[x]$. We call a polynomial $k \in K[x]$ a *least common multiple* (lcm for short) of f and g iff:
   (1) $f \mid k$ and $g \mid k$.
   (2) For all $h \in K[x]$ such that $f \mid h$ and $g \mid h$ we have $k \mid h$.

   Show that the following holds for arbitrary $f, g \in K[x]$:
   (a) There is a $k \in K[x]$ with $fK[x] \cap gK[x] = kK[x]$ and moreover k is a lcm of f and g.
   (b) If $k \in K[x]$ is a lcm of f und g then $fK[x] \cap gK[x] = kK[x]$.
   (c) If d is a greatest common divisor (gcd) of f and g and k a lcm of f und g, then there exists $c \in K \setminus \{0\}$ such that $dk = cfg$.

4. *(2 Punkte)* Bestimme einen größten gemeinsamen Teiler d und ein kleinstes gemeinsames Vielfaches k der Polynome
   $$f := x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1 \qquad \text{und} \qquad g := x^9 + x^3$$
   aus $\mathbb{Q}[x]$ sowie eine Vielfachsummendarstellung von d.

5. *(2 points)* Show that a polynomial $p \in K[x]$ is irreducible, if $pK[x] \neq K[x]$ and if there does not exist any ideal I in $K[x]$ with $pK[x] \subsetneqq I \subsetneqq K[x]$ (i.e., if $pK[x]$ is a " maximal ideal" in $K[x]$).

6. *(1 Punkt)* Es sei $T\colon K[x] \to K[x]$ mit
   $$T \in \mathrm{Hom}_K(K[x], K[x]), \tag{1}$$
   $$T(f \cdot g) = (Tf) \cdot g + f \cdot (Tg) \quad \text{für alle } f, g \in K[x], \tag{2}$$
   $$Tx = 1. \tag{3}$$
   Bestimme die Koeffizienten von $T\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right)$.

Abgabe bis Mittwoch, den 21. Mai 2003 um 8^{15} Uhr.