Prof. Dr. Klaus Doerk
Jens Mandavid
Christian Sevenheck

Blatt 1
06.05.2003

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra II

1. *(1 point)* Let k be a field and consider the polynomial ring $k[t]$ as a k-algebra. Let D and M be the k-linear map of differentiation with respect to t and of multiplication by t, respectively. Decide whether D and/or M are homomorphisms of k-algebras.

2. *(2 Punkte)* Dividiere in den folgenden Beispielen jeweils f mit Rest durch g, d.h., für $f, g \in R$ bestimme q, r in R mit $\deg(r) < \deg(g)$ so dass $f = qg + r$.

   - $R = \mathbb{R}[t]$, $f = t^4 + 5t^3 + 7t^2 + 5t + 6$, $g = t^2 + t - 2$
   - $R = \mathbb{R}[t]$, $f = t^4 + 5t^3 + 5t^2 - 5t - 6$, $g = t^2 + t - 2$
   - $R = \mathbb{C}[t]$, $f = t^4 + 5t^3 + 7t^2 + 5t + 6$, $g = t^3 + (5 - i)t^2 + (6 - 5i)t - 6i$
   - $R = \mathbb{F}_2[x]$, wobei $\mathbb{F}_2 := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ den Körper mit zwei Elementen bezeichnet, $f = x^5 + x^4 + x^2 + 1$, $g = x^2 + x + 1$.

3. *(3 Punkte)* Sei k ein endlicher Körper. Betrachte den Polynomring $k[t]$ in einer Variablen. Definiere die folgende Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \Phi : k[t] & \longrightarrow & \mathrm{Abb}(k, k) \\ P(t) & \longmapsto & (a \mapsto P(a)) \end{array}$$

   (a) Zeige, dass Φ ein Homomorphismus von k-Algebren ist. Hinweis: Es wurde schon gezeigt (Klausur 2 in LA1), dass Φ ein Homomorphismus von Vektorräumen ist. Überlege also, was die Multiplikation in $k[t]$ und $Abb(k, k)$ bedeutet und zeige, dass Φ damit verträglich ist.

   (b) Wir wissen (ebenfalls Klausur), dass Φ nicht injektiv ist, da $k[t]$ unendlich und $Abb(k, k)$ endlich ist. Gib jetzt explizit ein Element des Kerns von Φ an

   (c) Begründe, dass der folgende Ausdruck $P_y(t)$ ein Polynom in $k[t]$ definiert.

$$P_y(t) = \prod_{x \in k \setminus \{y\}} \frac{t - x}{y - x}$$

   Bestimme die Werte $P_y(a)$ für $a \in k$ und zeige dass Φ surjektiv ist.

4. *(1 Punkt)* Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement. Zeige, dass die Einheiten von R eine Gruppe bezüglich der Multiplikation bilden.

5. *(1 Punkt)* Zeige, dass das Ideal $(2, X + 1) \subset \mathbb{Z}[X]$ kein Hauptideal ist, dass also $\mathbb{Z}[X]$ kein Hauptidealring sein kann.

6. *(2 points)* Let k be the field with two elements. Determine all irreducible polynomials $f \in k[t]$ with degree less or equal to four.

Bitte wenden !!!

Abgabe bis Mittwoch, den 14. Mai 2003 um 8^{15} Uhr.

Hinweise

Wie im letzten Semester gibt es jede Woche einen Übungszettel. **Ihr könnt die Lösungen zu zweit abgeben**. Den Schein bekommt man durch Bestehen **einer** Klausur, welche am Ende des Semesters (26.7.2003) stattfinden wird. Die Übungszettel sind im ps- und pdf-Format unter

http://enriques.mathematik.uni-mainz.de/linalg2Doerk.html

verfügbar.
Die Übungsgruppen beginnen in der Woche vom 12.5. bis 16.5.2003 und finden wie folgt statt:

Gruppe 1: Patrick Jahn	Gruppe 2: Kirsten Arnold	Gruppe 3: Christian Sevenheck
Mo, 12-14; 04-432	Di, 16-18; 04-422	Mi 10-12; 04-432